FACULDADE DE ENGENHARIA DE MINAS GERAIS – FEAMIG

Instituto Educacional “Cândida de Souza”

Eustáquio Rabelo de Souza

MANUAL DE USO DA ESTATÍSTICA EM PESQUISAS NA FEAMIG: planejamento amostral, estatística descritiva e inferências

Orientador: Ms. Wilson José Vieira da Costa

Coorientadora: Ms. Gabriela Fonseca Parreira

BELO HORIZONTE-MG

SETEMBRO/2020

Ficha catalográfica elaborada por Márcia Rosa Portes Braga CRB 6/ 1997

S719 SOUZA, Eustáquio Rabelo de
Manual de uso da estatística em pesquisas na FEAMIG: planejamento amostral, estatística descritiva e inferências. Belo Horizonte: FEAMIG, 2020.

105 f.; il.

Faculdade de Engenharia de Minas Gerais – FEAMIG

1. Manual de estatística. 2. Estatística. 3. Planejamento amostral. 4. Pesquisas. I. FEAMIG. II. PPDC.

CDU 311 (035)

EXPEDIENTE:

Presidente da Mantenedora
Prof. Doutor Ricardo Queiroz Guimarães

Diretor Executivo
João Jorge Rodrigues Lourenço

Coordenação Geral de Cursos
Alcir Garcia Reis

Coordenação da Educação a Distância
Paulo Marcelo Villani

Coordenação do Centro de Pesquisa, Produção e Divulgação Científica
Prof. Wilson José Vieira da Costa
Profa. Raquel Ferreira de Souza

Coordenação do CENEX
Raquel Ferreira de Souza

Coordenação do Setor de Estágios
Lílian Menezes

Coordenação da Biblioteca
Márcia Rosa Portes Braga

Editora
Faculdade de Engenharia de Minas Gerais

Editoração
Luciana Cardoso

Revisão Textual
Márcia Rosa Portes Braga

Diagramação
Luciana Helena Pereira Cardoso

Distribuição
Assessoria de Comunicação

Equipe de Comunicação
Projeto Gráfico - Luciana Cardoso
Comunicação - Luciana Cardoso | Jennifer Krammer

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE EQUAÇÕES E FÓRMULAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FEAMIG	Faculdade de Engenharia de Minas
MEC	Ministério da Educação e Cultura
NEPP	Núcleo de Estágio e Práticas Profissionais
PPDC	Programa de Pesquisa, Produção e Divulgação Científica Pesquisa
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso

1 A ANÁLSE ESTATÍSTICA EM PESQUISAS

A análise estatística dos dados é fundamental para gerar resultados representativos e válidos. Determinar o tamanho e a composição da amostra a ser utilizada é uma demanda crescente dos discentes em época de Big Data e indústria 4.0.

Este manual traz orientações acerca de:

a) Determinar a necessidade da amostra;
b) Calcular o tamanho adequado da amostra;
c) Definir a melhor técnica de amostragem;
d) Elaborar questionários;
e) Definir quando utilizar medidas, tabelas e gráficos para análise dos dados;
f) Definir quando usar cada teste paramétrico ou não paramétrico;
g) Identificar relações e correlações entre variáveis.

2 TÉCNIAS ESTATÍSTICAS

2.1 Estatística

Estatística trata da coleta, análise e apresentação de dados para a tomada de decisões e resolução de problemas, ou seja, um conjunto de métodos e processos quantitativos utilizados para avaliar e medir os fenômenos coletivos de acordo com Montgomery *et al*. (2006).

Segundo Soares; Farias; César (2003) a Estatística se divide em três grandes áreas:

a) Amostragem que cuida da coleta de dados;
b) Estatística descritiva que se ocupa com o resumo e organização dos dados coletados;
c) Inferência que engloba as técnicas para tomada de decisões sobre a população a partir de amostras.

2.2 Etapas de uma pesquisa estatística

Os principais estágios de uma pesquisa de acordo com Soares; Farias; César (2003) são:

1º. Objetivo da pesquisa: Definir claramente os objetivos da pesquisa;
2º. População alvo da pesquisa: As conclusões da pesquisa são sobre quais indivíduos ou elementos?;
3º. Dados a serem coletados: Definir as características (variáveis) de interesse como o comprimento da peça, número de funcionários satisfeitos, tempo de atendimento;
4º. Grau de precisão desejado: Estipular o quanto o estudo pode estar errado, 1%, 3% ou 5% por exemplo. Este erro é proveniente de amostras ou instrumentos de medida;
5º. Método de coleta de dados: Elaboração de questionários, entrevistas, relatórios médicos, redes sociais;
6º. Escolha da amostra: Escolher parte ou toda a população respeitando as restrições de tempo e dinheiro. Trabalhar com toda a população é dispendioso, porém os erros de conclusão são menores;
7º. Coleta de dados: Treinar os entrevistadores, definir quando a coleta será realizada;
8º. Resumo e análise dos dados: Tabelas, gráficos, medidas resumo, técnicas de inferências.

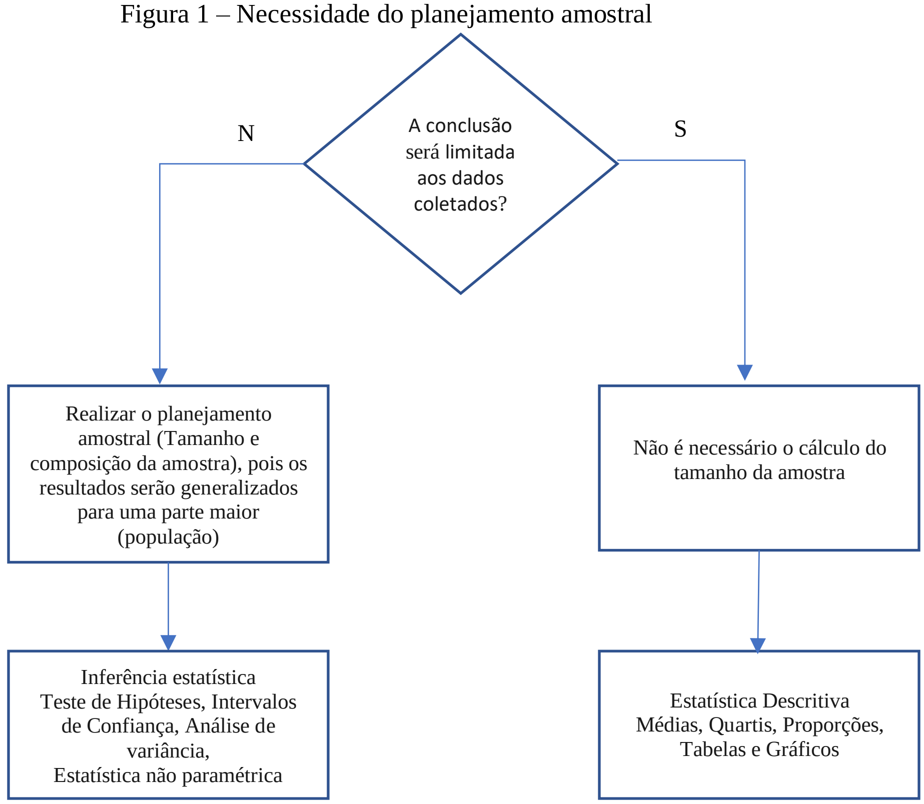
Neste trabalho, apresenta-se as técnicas para realizar cada uma dessas etapas.

2.3 Necessidade do planejamento amostral

Um trabalho de pesquisa pode ficar só na amostra coletada ou generalizado para toda a população. Para definir a necessidade de calcular o tamanho de amostra, é necessário responder a seguinte pergunta: os resultados do estudo serão generalizados ou ficarão somente nos dados que serão coletados?

A Figura 1 apresenta tal procedimento.

Figura 1 – Necessidade do planejamento amostral

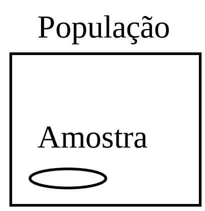


Fonte: ELABORADO PELO O AUTOR (2020).

2.4 População e amostra

População é totalidade das observações sob as quais recai o nosso interesse segundo Soares; Farias; César (2003). Amostra é o subconjunto de observações extraídas de uma população. Amostragem é processo de escolha da amostra envolvendo o tamanho e a composição. Este esquema está na Figura 2.

Figura 2 – População e amostra



Fonte: Extraído de SOARES; FARIAS; CÉSAR (2003).

De acordo com Soares; Farias; César (2003) a população alvo é a população sobre a qual vamos tirar conclusões baseados nos resultados da amostra. Como exemplo, o interesse do estudo são todos os alunos da FEAMIG (graduação e pós-graduação) ou somente da graduação (manhã e noite) ou só dos alunos do curso de Engenharia de Produção do turno da noite? São perguntas que se deve responder para definir a população alvo. Após definir esta população alvo, deve-se estabelecer as características de interesse dos elementos. Estas características podem ser nota do aluno, renda mensal (reais), comprimento (centímetros) de peças.

No Quadro 1, apresenta-se alguns exemplos de população e amostra.

Quadro 1 – Exemplos de população e amostra em processos produtivos

Objeto de estudo	**População**	**Amostra**
Os produtos	Calça , Camisa, Saia, Vestido	Calça e Camisa
Os operadores	Todos os operadores de corte, costura e bordado	Alguns operadores de cada atividade
O momento da coleta	Todos os turnos e dias da semana	Alguns dias da semana durante alguns turnos

Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

Considere um lote de produção de 800 peças. O gerente precisa determinar o comprimento médio das 800 peças. Ele pode fazer isso medindo cada uma das peças e calculando a média ou selecionar uma amostra que represente a população e em seguida calcular o comprimento médio dessa amostra. Esta média irá valer para todo o lote. Para que isso seja válido, deve-se determinar quantas peças serão selecionas e quais peças irão fazer parte da nossa amostra, isto é, realizar o planejamento amostral.

2.5 Técnicas de amostragem

Para selecionar uma amostra, existem dois grandes grupos de técnicas de amostragem de acordo com Soares; Farias; César (2003):

a) **Amostragem probabilística**: É a mais utilizada, pois permite calcular a probabilidade de cada elemento participar da amostra. Assim é possível fazer inferências sobre a população;

b) **Amostragem não probabilística**. É baseada no julgamento e experiência. As conclusões da amostra não podem ser generalizadas para a população.

As principais amostragens probabilísticas estão no Quadro 2. Apresenta-se também quando e como usar cada uma delas de acordo com Soares; Farias; César (2003).

Quadro 2 – Principais técnicas de amostragem, quando usar cada uma e procedimetnos

Técnica de amostragem	**Quando usar**	**Procedimento**
Amostragem aleatória simples	Todos os elementos da população têm a mesma importância para o estudo	Sortear n elementos da população, sendo que cada um possui a mesma probabilidade de pertencer à amostra
Amostragem sistemática	Todos os elementos da população têm a mesma importância para o estudo e existe uma lista	Sortear o primeiro elemento. Os demais serão escolhidos sistematicamente (3 em 3, 10 em 10 da lista)
Amostragem estratificada	A população é dividida em grupos ou estratos (turno, produto, curso).	Calcular o percentual de cada grupo Aplicar esse percentual no tamanho da amostra (n): n1, n2. Sortear os elementos n1, n2 utilizando a aleatória simples ou a sistemática
Amostragem por conglomerados ou amostragem por área	A população é dividida em grupos (conglomerados), mas sem uma lista ou a distância entre os elementos é muito grande	Selecionar aleatoriamente grupos e todos os elementos de cada grupo que irá pertencer à amostra.

Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

A seguir detalha-se cada uma das técnicas de amostragem.

2.5.1 Aleatória simples

É a mais utilizada. Todo o elemento da população possui a mesma probabilidade de participar da amostra. Assim é possível fazer inferências sobre a população.

Considere que 500 clientes estejam cadastros em sua empresa e você precisa extrair uma amostra de 2%. Como fazer? Precisa-se escolher 10 clientes. Atribua um número para cada cadastro. Utilize bolas numeradas de 0 a 9 e coloque numa urna misturando bem. Retire a primeira bola, ela será o primeiro dígito do cadastro. Lembre-se que precisamos de 3 dígitos. Volte a bola para urna e repita o processo. Despreze os números maiores que 500 e os repetidos.

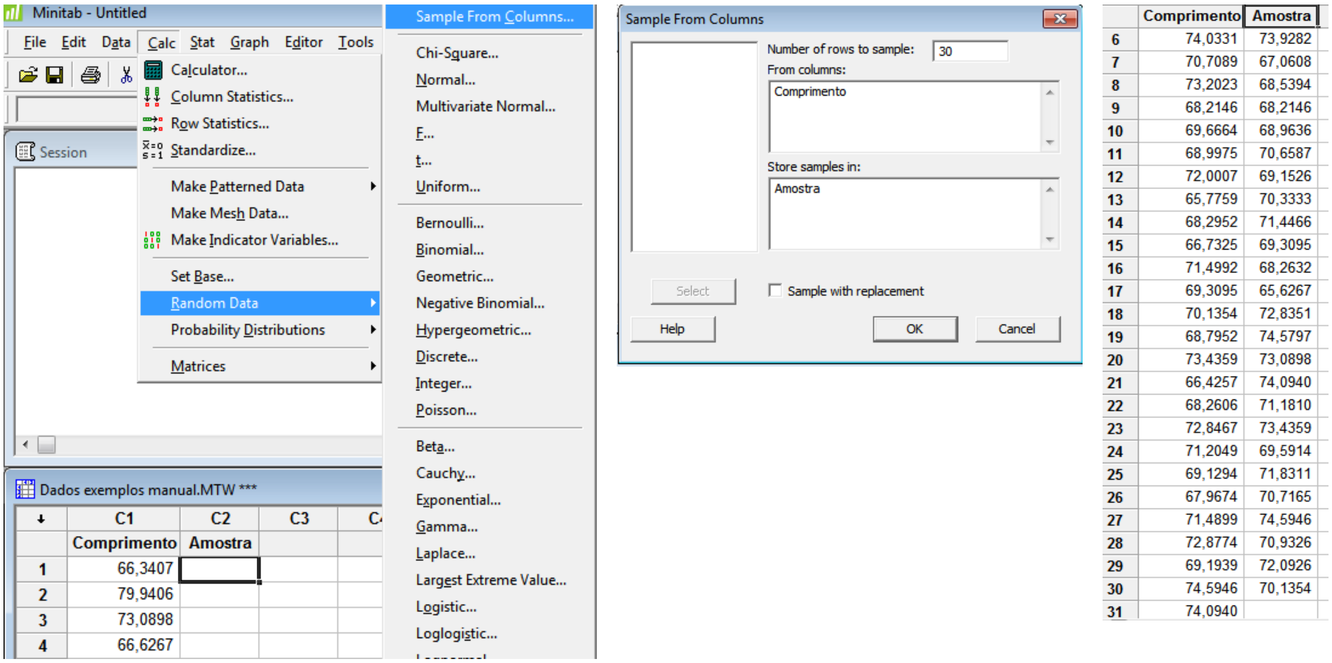
Como isso não é prático, utiliza-se uma tabela de números aleatórios para realizar o sorteio.

<u>Números aleatórios</u>

3690	2492	7171	.....	4730
0813	6790	6858	.....	8280
6477	5289	4092	.....	9202
0772	2160	7236	.....	9232

Considere uma população de 200 comprimentos de peças. Selecione uma amostra aleatória simples de tamanho 30.

Figura 3 – Amostragem aleatória simples no *software* Minitab



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

2.5.2 Amostragem sistemática

É constituída de elementos retirados da população segundo um sistema preestabelecido. Considere que 500 clientes estejam cadastros em sua empresa e você precisa extrair uma amostra de 2%. Divida 500 por 10. Escolha na tabela de números aleatórios um número entre 1 e 50 inclusive. Este será o primeiro cadastro da amostra. A partir deste número conte 50 cadastros e retire o último para constituir a amostra. Proceda dessa forma até completar a amostra

2.5.3 Amostragem estratificada

Se a população é constituída por subgrupos (estratos), a amostra estratificada é composta por elementos provenientes de todos os estratos. A amostra será proporcional a representação de cada grupo.

Considere que 500 clientes (70% da classe A e 30% da B) estejam cadastros em sua empresa e você precisa extrair uma amostra de 2%. Como fazer? Retire uma amostra de tamanho 7 da classe A e 3 da classe B. Para selecionar os elementos de cada grupo, utiliza-se a amostragem aleatória simples ou sistemática

2.5.4 Amostragem por conglomerados

Também conhecida por amostragem por área. A população é dividida em grupos (conglomerados). Seleciona aleatoriamente grupos e todos os elementos de cada grupo irão pertencer a amostra. Normalmente a amostragem por conglomerados é utilizada quando não se tem uma listagem da população ou a distância entre os elementos da população é grande gerando um alto custo.

2.6 Cálculo do tamanho da amostra

Normalmente o cálculo do tamanho da amostra é realizado para estimar médias (comprimento médio de peças, nota média de uma turma) ou proporções (proporção de peças defeituosas, percentual de clientes satisfeitos). A seguir apresenta-se as fórmulas para as duas situações.

2.6.1 Tamanho da amostra para estimar uma média

Considere uma população infinita, isto é, N > 100.000. O tamanho da amostra é calculado de acordo com Equação 1.

Equação 1 – Tamanho da amostra para estimar uma média de uma população infinita

$$n = \left[\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \times S}{E}\right]^2 \tag{1}$$

O valor de 100.000 é considerado como população infinita segundo Gil (1999).

E é o erro máximo admissível. Estipulado pelo pesquisador. Quanto menor o erro aceitável, maior o tamanho da amostra.

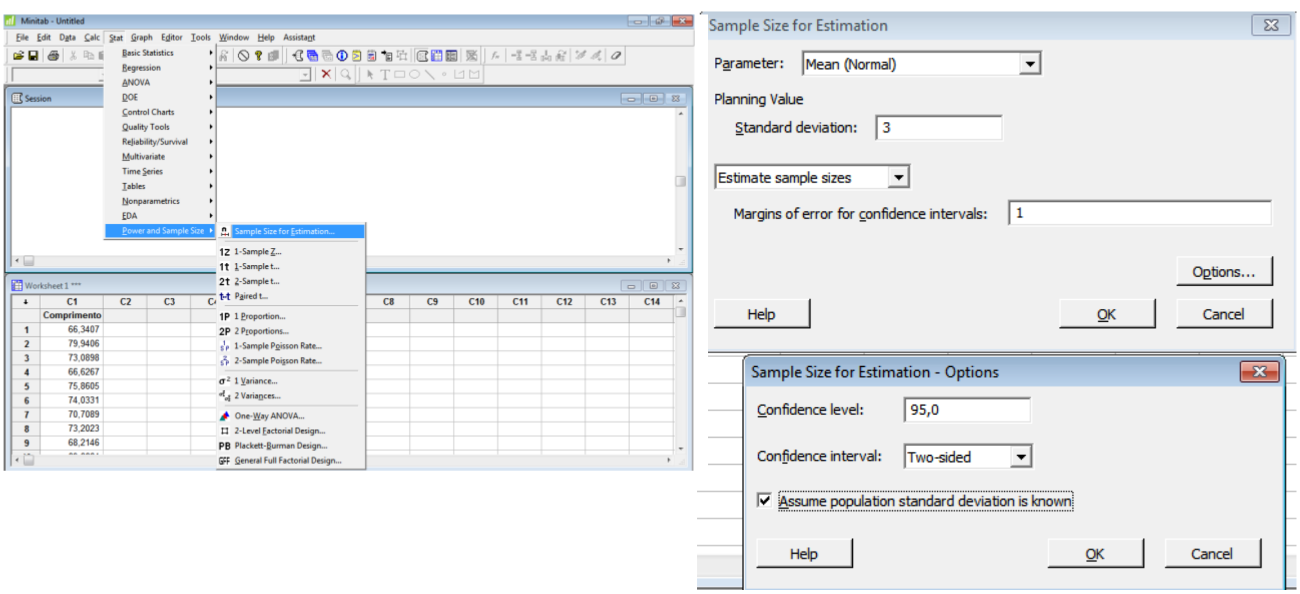
Z é um valor tabelado da distribuição normal de acordo com um nível de confiança. É usual utilizar 95% de confiança (z = 1,96).

S é o desvio padrão de uma amostra piloto. Quanto maior o desvio padrão, maior o tamanho da amostra.

Para determinar o comprimento médio de uma peça, foram coletadas algumas amostras. O desvio padrão encontrado foi de 3 centímetros. Considerando uma confiança de 95% e um erro máximo de 1 centímetro, determine o tamanho da amostra.

$$n = \left[\frac{1{,}96 \times 3}{1}\right]^2 = 34{,}57 => 35\ peças$$

Figura 4 – Cálculo do tamanho a amostra no *software* Minitab



Fonte: *Software* Minitab (2020).

Sample Size for Estimation
Results
Sample Size
35

Caso o tamanho (N) da população seja conhecido, deve-se utilizar o seguinte fator de correção. Considere que o tamanho de amostra calculado anteriormente como n_o. Assim, o novo tamanho de amostra n é calculado conforme a Equação 2.

Equação 2 – Tamanho de amostra corrigido pelo tamanho da população finita

$$n = \frac{n_o}{1+\frac{no}{N}} \quad ou \quad n = \frac{N \times n_o}{N + n_o} \tag{2}$$

Onde n_o é o tamanho de amostra inicial e n é o tamanho da amostra final.

Para o exemplo anterior considere que o tamanho da população seja um lote de 200 peças.

$$n = \frac{N \times n_o}{N + n_o} = \frac{200 \times 35}{200 + 35} = 30$$

2.6.2 Tamanho da amostra para estimar uma proporção

A fórmula para calcular o tamanho de amostra para proporção está na Equação 3.

Equação 3 – Tamanho da amostra para estimar uma proporção

$$n = \frac{\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 p(1-p)}{E^2} \tag{3}$$

Onde:

p é proporção inicial de uma amostra piloto. Caso não tenha esta estimativa utilize p=0,5.

Numa amostra inicial encontramos 3% de peças defeituosas. Determine o tamanho da amostra para uma confiança de 98% e um erro máximo 1%.

$$n = \frac{(2{,}33)^2 \times 0{,}03(1-0{,}03)}{0{,}01^2} = 1.580$$

Caso a população seja finita utilizar o fator de correção.

Após a determinação do planejamento amostral (tamanho e composição da população) deve-se coletar os dados. Para isso utiliza-se questionários ou coleta automática de dados (uma balança que registra o peso de produtos ao final de uma linha de produção ou uma senha num cartório que de registra o horário de chegada do cliente).

2.7 Elaboração de questionário

Segundo Soares; Farias; César (2003) os tipos de questões mais utilizadas em questionários são de múltipla escolha e questões de resposta aberta. As alternativas na questão de múltipla escolha devem ser objetivas e excludentes entre si. Sempre que que for relacionada a opinião, apresentar opções de ambos os lados do assunto. Um número elevado de alternativas pode confundir o respondente. Uma desvantagem da múltipla escola e limitar as respostas o que pode impedir o respondente de dizer o que realmente pensa.

Na questão com resposta aberta isso não acontece, pois o entrevistado responde com suas próprias palavras. Porém, a tabulação (análise) dos dados é uma tarefa dispendiosa devido ao grande número de respostas diferentes que podem aparecer. Por isso, este tipo de pergunta é mais utilizado na fase inicial (piloto) da pesquisa. Pode-se fazer perguntas abertas para auxiliar a construção do questionário com perguntas de múltiplas escolhas de acordo com Segundo Soares; Farias; César (2003).

Algumas orientações na construção do questionário segundo Soares; Farias; César (2003) são:

a) Ordem das questões: As primeiras questões são para estabelecer contato com o entrevistado. A ordem das questões pode afetar as respostas dadas pelo entrevistado (questões sobre produto ou marca devem ficar para o final);
b) Clareza nas perguntas: Uma pergunta deve ter aproximadamente o mesmo sentido para todos os entrevistados. As perguntas devem ser simples e sem dubiedade;
c) Não sugerir respostas: Não induzir o entrevistado como “Você concorda em que este curso, sendo o melhor, deva custa mais caro?”;
d) Tipo de abordagem: Entrevistados tendem a racionalizar ou exagerar na resposta dependendo da maneira que são abordados (em público ou diretamente sobre assuntos que envolvam prestígio e autoestima). É melhor uma abordagem individual;
e) Pré-teste: Após elaborar o questionário, deve-se realizar um teste com alguns entrevistados para verificar o leiaute, a ordem das perguntas e redação das mesmas. Isso irá melhorar a versão final do questionário.

2.8 Estatística Descritiva

Devido ao volume, os dados coletados (da população ou da amostra) devem ser resumidos em tabelas, gráficos ou medidas (médias, percentuais). Isto é fundamental para apresentar as conclusões da pesquisa. É a parte da estatística mais simples, porém mais utilizada. Os métodos mais usados são tabelas, gráficos e medidas resumo como a média.

2.8.1 Tabela ou distribuição de frequências

Como dito anteriormente, os dados obtidos durante a coleta devem ser reduzidos de forma a possibilitar a interpretação dos mesmos durante a fase de análise. Para isso, torna-se necessária a identificação do número de vezes que os dados aparecem na coleta. Isso é feito pela determinação das frequências.

Exemplo: Sejam as notas de 49 alunos em estatística

75	89	66	52	90	68	83	94	77	60	38	47	87	65	98
49	65	70	73	81	85	77	83	56	63	79	82	84	69	70
62	75	68	88	74	30	81	76	74	63	69	73	91	87	76
58	63	71	82											

Tem-se uma amostra de n = 49 valores.

Os seguintes passos são necessários para construção de uma tabela com perda de informação (intervalos de classe):

a) Determinação do Número de Classes (K) da série, que é a definição do número de intervalos gerados na sequência. Intervalo de uma classe é qualquer subdivisão da amplitude total de uma série. Existem critérios empíricos para a determinação do número de classes, entre eles o critério da raiz conforme Equação 4.

Equação 4 – Determinação do Número de Classes (K)

$$k = \sqrt{n} \qquad (4)$$

O número de classes deve ser inteiro.

$k = \sqrt{49} = 7$. portanto, para este exemplo, a tabela terá 7 intervalos de classe.

b) Cálculo da altura ou amplitude das classes (h), que é a diferença do limite superior pelo inferior de uma classe, que deve ser mantido igual para todas as classes. Caso necessário, aumente o intervalo de tal forma que seja um número inteiro. A fórmula está na Equação 5.

Equação 5 – Cálculo da altura ou amplitude das classes (h)

$$h = \frac{A_t}{k} \qquad (5)$$

Onde:

At = $X_{máx} - X_{mín}$

At = 98 – 30 = 68, desta maneira, temos: $h = \frac{68}{7} \cong 10$

Cada classe terá altura de 10. Começando pelo menor valor do conjunto de dados (30), soma-se 10, obtendo o limite superior da classe 40. A notação mais utilizada é 30 |- 40. Aonde o valor 30 pertence ao intervalo (fechado) e 40 não pertence (intervalo aberto). Isto porque de 30 a 40 são 11 valores (incluídos os limites).

c) Calcular as frequências de cada classe

- Frequência absoluta simples (f_i)

É a contagem (frequência) de elementos pertencentes a determinada classe. Na primeira classe que vai de 30 (inclusive) e 40 (exclusive), vamos denotar por 30 |- 40, temos 2 alunos.

75	89	66	52	90	68	83	94	77	60	**38**	47	87	65	98
49	65	70	73	81	85	77	83	56	63	79	82	84	69	70
62	75	68	88	74	**30**	81	76	74	63	69	73	91	87	76
58	63	71	82											

- Frequência relativa simples (f_{ri})

A frequência relativa é obtida pela divisão da frequência simples do elemento ou classe pelo número total de elementos da série. Ou seja, $fr_i = f_i / n$. Para a primeira classe deste exemplo, f_{ri} = 2/ 39 = 0,0408 ou 4,08%. A primeira classe possui 4,08% de todo o conjunto de dados (de todas as notas). Pode-se dizer que 4,08% dos alunos obtiveram nota entre 30 e 39,999.

- Frequência absoluta acumulada (F_i)

A frequência acumulada é obtida como a soma das frequências simples dos elementos ou classes que o antecedem, ou seja, $F_i = f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_i$

- Frequência relativa acumulada (Fr_i)

A frequência relativa acumulada é obtida, dentre outras formas, pela divisão da frequência acumulada do elemento ou classe pelo número total de elementos da série, ou seja:

$$Fr_i = F_{1\ /}\ n$$

O resumo dos dados está na Tabela 1.

Tabela 1 – Distribuição de frequências de notas de alunos

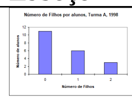
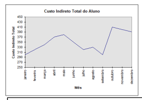
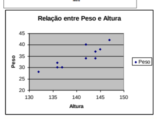
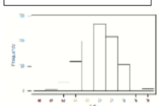
Classe	**f_i**	**Fi**	**fr_i**	**Fr_i**
30 | - 40	2	2	0,0408	0,0408
40 | - 50	2	4	0,0408	0,0816
50 | - 60	3	7	0,0612	0,1428
60 | - 70	12	19	0,2449	0,3877
70 | - 80	14	33	0,2857	0,6734
80 | - 90	12	45	0,2449	0,9183
90 | - 100	4	49	0,0816	1,00
Total	49		1,00	

Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

2.8.2 Gráficos

São utilizados para resumir ainda mais os dados e de uma maneira mais visual que uma tabela. Definir a forma gráfica ideal para cada caso, buscando, sempre, a clareza e a simplicidade necessárias para uma rápida interpretação, pelo observador, das informações contidas no gráfico. Quando usar cada gráfico está no Quadro 3.

Quadro 3 – Principais gráficos e quando usar cada um

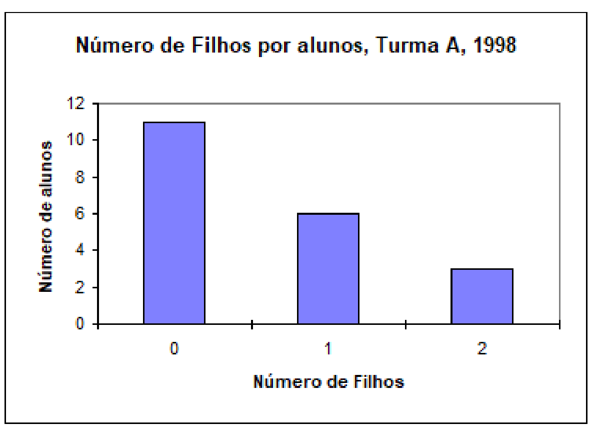
Gráfico	Esboço	Quando usar
Colunas ou barras		Comparar quantidades por categoria (máquina, turno, turma, marca, modelo, filial)
Setores (pizza)		Apresentar percentuais divididos em fatias (categorias)
Linhas		Representar séries temporais: vendas por mês, produção diária
Dispersão		Visualizar o relacionamento existente entre duas ou mais variáveis
Histograma		Assimetria (forma) que os dados estão distribuídos e o grau de achatamento (curtose)

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

- <u>Gráficos de Colunas ou Barras</u>

São os gráficos representados por retângulos de base comum e altura proporcional à magnitude dos dados. São chamados de colunas se posicionadas na vertical e de barras se posicionados na horizontal. São normalmente utilizados para representarem séries especificativas ou categóricas. Um exemplo está na Figura 5.

Figura 5 – Gráfico de Colunas



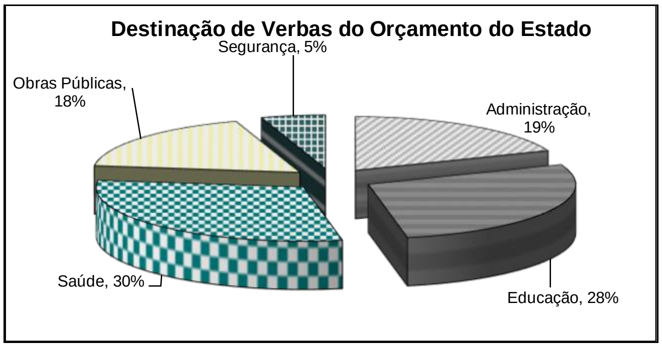
Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

Podemos observar que existe uma frequência maior de alunos sem filhos nesta turma.

- <u>Gráficos de Setores</u>

Também conhecidos como gráficos de pizza. Estes gráficos são compostos de um círculo (ou disco) dividido em fatias, ou setores, proporcionais aos valores(frequências) das categorias que um fato se divide. Um exemplo está na Figura 6.

Figura 6 – Gráfico de Setores

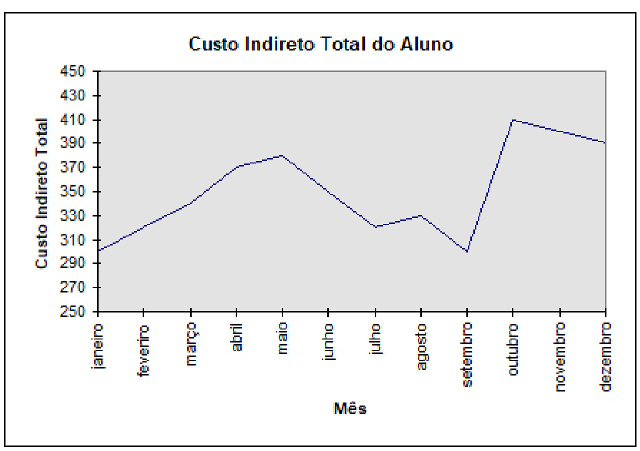


Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

- <u>Gráficos de Linhas</u>

Estes gráficos são baseados na representação de pontos no plano cartesiano bidimensional. São muitos utilizados para representar séries temporais, colocando-se o tempo no eixo X e a variável observada no eixo Y. Um exemplo está na Figura 7.

Figura 7 – Gráfico de Linhas



Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

Pode-se observar um aumento no custo do aluno ao longo do ano, apesar de um decréscimo de junho a setembro. Pode-se utilizar mais de uma linha no gráfico, por exemplo, comparar o custo do aluno de 3 escolas no mesmo gráfico. Cada escola deve ser representada por uma linha.

- <u>Gráfico de Dispersão</u>

Segundo Werkema (1995) o diagrama de dispersão é um gráfico utilizado para a visualização de relacionamento existente entre duas variáveis.

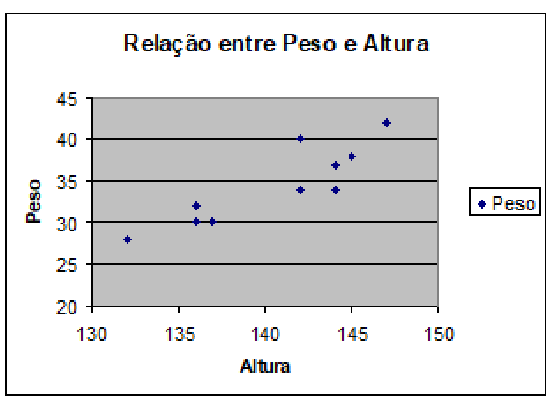
Ainda, de acordo com Werkema (1995) a análise dos tipos de relações existentes entre as variáveis associadas a um processo, contribui para aumentar a eficiência dos métodos de controle do processo, para facilitar a detecção de possíveis problemas e para o planejamento das ações de melhoria adotadas.

Os dados abaixo dão as estaturas (x) e os pesos (y) de 10 alunos de 12 anos sorteados ao acaso.

x	136	142	132	145	144	147	137	136	142	144
y	32	34	28	38	37	42	30	30	40	34

O diagrama de dispersão está apresentado na Figura 8.

Figura 8 – Gráfico de dispersão para peso e altura

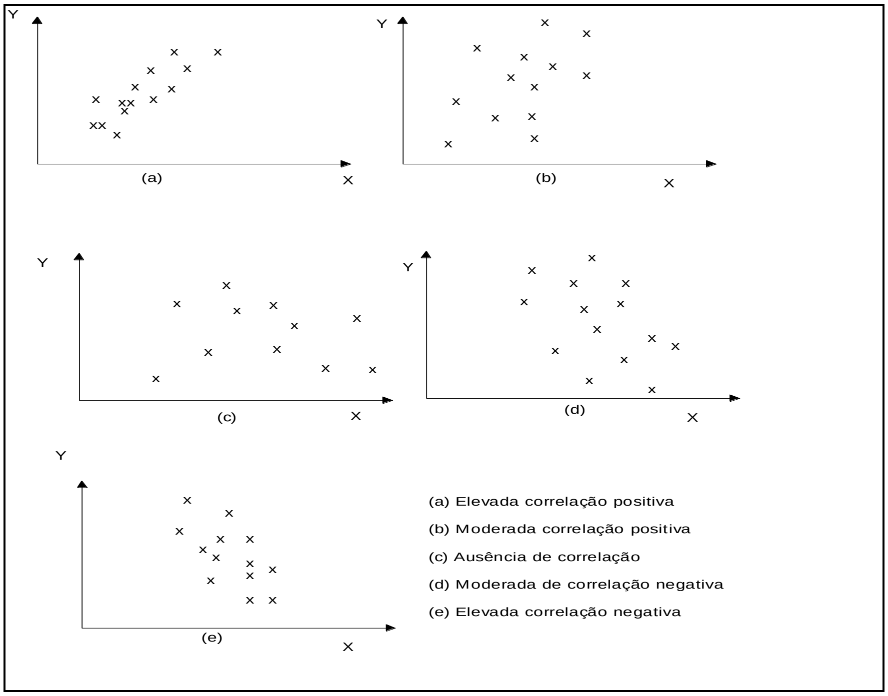


Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

Parece que existe uma relação linear entre peso e altura, pois os pontos se aproximam de uma reta.

Algumas configurações e interpretações possíveis do diagrama de dispersão são apresentadas na Figura 9.

Figura 9 – Exemplos típicos de Diagrama de Dispersão



Fonte: EXTRAÍDO DE WERKEMA (1995).

De acordo com Werkema (1995) o padrão (a) indica que à medida que x aumenta, y também aumenta, e esta tendência é muito clara. A moderada correlação positiva (b) em que y tende a aumentar com x, mas este relacionamento entre as variáveis apresenta uma eleva variabilidade. Neste caso, outras variáveis são necessárias para explicar a variabilidade em y. No padrão (c) não existe correlação entre x e y, ou seja, os valores assumidos por uma variável não estão relacionados aos valores da outra variável. O diagrama (d) corresponde à situação de moderada correlação negativa, em que y tende a diminuir com o aumento de x. Por fim o diagrama (e) que ilustra uma forte correlação negativa entre as variáveis: é nítido o fato de que os valores mais baixos de y estão diretamente associados a valores mais elevados de x.

- <u>Histograma</u>

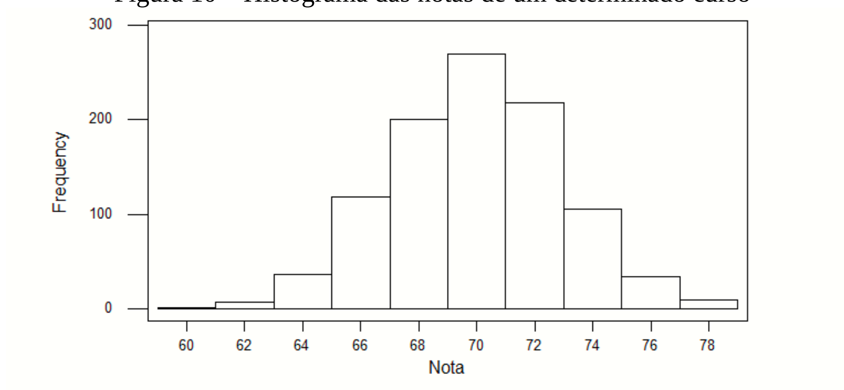
O histograma dispõe as informações de modo que seja possível a visualização da forma (simetria) da distribuição de um conjunto de dados e também a percepção da localização do valor central e da dispersão dos dados em torno este valor central de acordo com Soares; Farias; César (2003).

Serve também para comparar com os limites de especificação de um produto ou serviço com o resultado atual do processo.

Composto por colunas adjacentes (retângulos), o histograma tem no seu eixo X a representação dos intervalos (tamanho) das classes e no eixo Y a frequência correspondente. O centro do retângulo deve coincidir com ponto médio da classe.

A Figura 10 apresenta um histograma de notas de um curso.

Figura 10 – Histograma das notas de um determinado curso

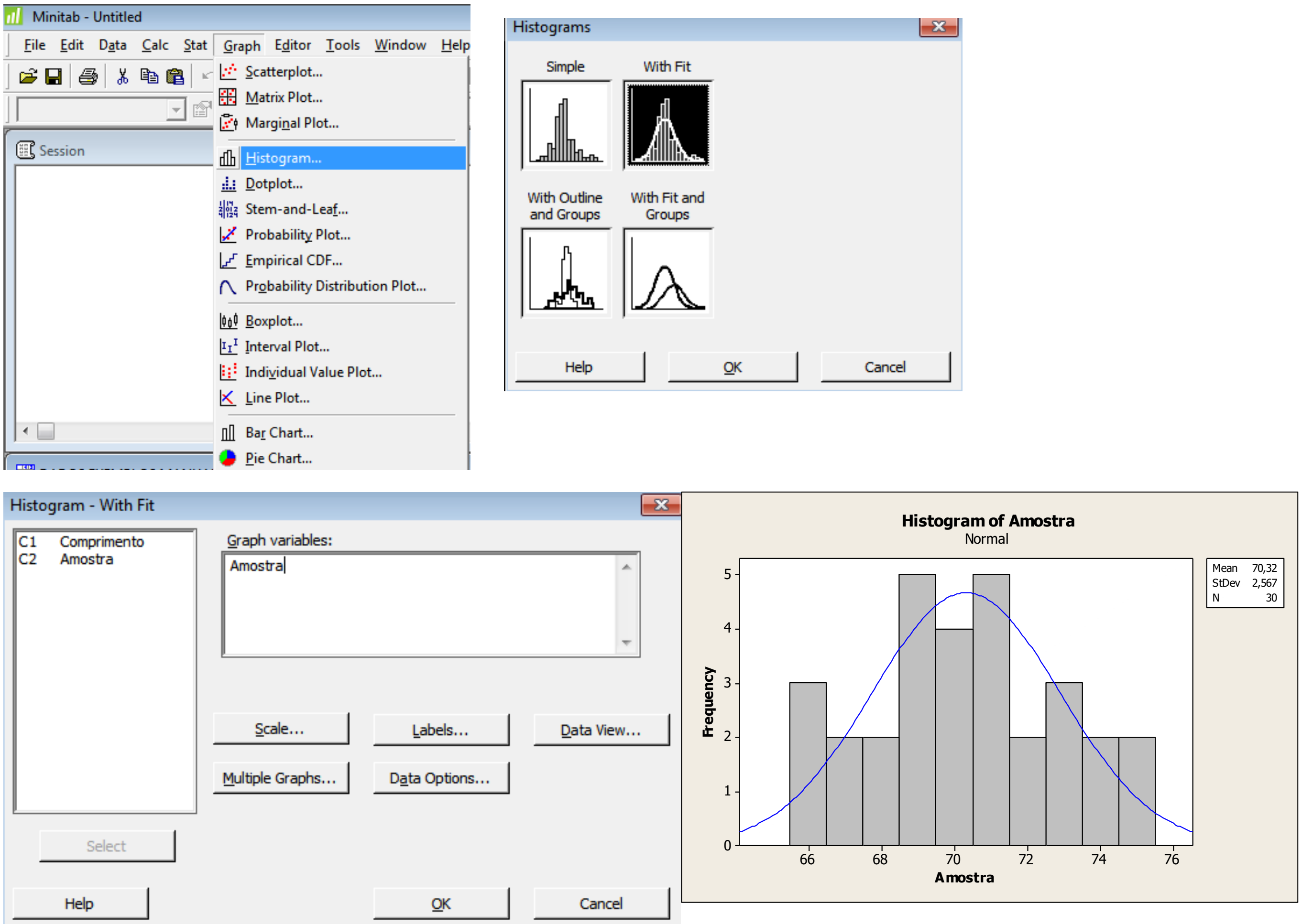


Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

Pode-se observar uma concentração em torno do valor 70 (pico), isto é, uma baixa variabilidade. E uma simetria presente no conjunto de dados, pois aproximadamente metade do gráfico está abaixo desse valor 70. A média deste conjunto é 70 pontos.

A construção o histograma no software Minitab está na Figura 11.

Figura 11 – A construção do histograma no *software* Minitab



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

Pode-se observar que os dados (colunas) se aproximam da curva simétrica.

2.8.3 Medidas Resumo

Pode-se resumir o conjunto de dados em medidas ao invés de tabelas e gráficos. São utilizadas para sintetizar em um único número o conjunto de dados observados. As medidas resumo pertencem a dois grandes grupos: medidas de posição e medidas de dispersão. As medidas mais utilizadas são de posição (média, mediana) e dispersão (desvio padrão e amplitude). As principais medidas resumo estão no Quadro 4.

Quadro 4 – Principais medidas resumo, quando usar e fórmulas

Medida	Quando usar	Fórmula
Média aritmética simples	Para representar o ponto central de um conjunto com baixa variabilidade	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$
Média aritmética pondera	Os dados não possuem a mesma importância (recrutamento)	$\overline{x_p} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$
Proporção	Variáveis qualitativas nominais ou por categoria (número de defeitos por turno)	$p = \frac{x}{n}$
Mediana	Dados com alta variabilidade (impede o uso da média)	n ímpar: é a observação que está na posição $\frac{n+1}{2}$ n par : $\frac{1}{2}\left[x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+1}{2}}\right]$
Quartis, decis e percentis	Dividir o conjunto dados em 4, 10 ou 100 partes	Posição do Q_1 $\frac{n+3}{4}$ e do Q_3 $\frac{3n+1}{4}$
Desvio padrão	Quantificar a variabilidade presente nos dados	$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$
Distância interquartílica	Medir a variabilidade quando os dados estão muito dispersos	$IQ = Q_3 - Q_1$

Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

- <u>Médias</u>

O objetivo das médias é identificar os valores em torno dos quais os dados tendem a se concentrar de acordo com Soares; Farias; César (2003). Aborda-se dois tipos de médias existentes: a média aritmética e a média ponderada.

<u>Média aritmética simples</u>

É a medida estatística mais utilizada. O cálculo é de acordo com a Equação 6.

Equação 6 – Média aritmética simples

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad (6)$$

Exemplo: Seja o número de peças defeituosas por dia: 4, 5, 8, 9, 4

=> $\overline{x}$ = (4 + 5 + 8 + 9 + 4) / 5 = 30 / 5 => $\overline{x}$ = 6

Em média, são fabricadas seis peças defeituosas por dia.

A média só deve ser utilizada se o resultado da mesma cair próximo ao meio do conjunto de dados, o que indica que existe baixa variabilidade presente nos dados. Caso isso não aconteça, deve-se utilizar outras medidas como a mediana que serão apresentadas a seguir.

Média aritmética ponderada

Em alguns casos torna-se necessária a aplicação de determinados pesos aos valores de uma série, dando um grau de importância diferenciado para os dados apresentados, antes da determinação do valor médio. A média pondera é calculada conforme a Equação 7.

Equação 7 – Média aritmética ponderada

$$\overline{x_p} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \tag{7}$$

Exemplo: X: 2, 4, 5 com os pesos correspondentes p : 1, 3, 2

$$\overline{x_p} = \frac{(2.1) + (4.3) + (5.2)}{(1 + 3 + 2)} = 4$$

- Mediana (Md)

A mediana é o valor que ocupa a posição central de uma série segundo Soares; Farias; César (2003). Trata-se de um valor real que separa o rol de dados em duas partes, deixando à esquerda o mesmo número de observações que à sua direita.

A mediana não sofre muito com a presença de valores extremos (muito altos ou muito baixos). Costuma-se dizer que a mediana é mais robusta do que a média aritmética. Deve-se preferir a mediana como medida sintetizadora quando o histograma do conjunto de dados é assimétrico, tal como, por exemplo, a distribuição de salários dos empregados de uma empresa. A determinação da mediana varia se o número de observações (n) é par ou ímpar.

a) n é número par

A mediana é obtida pela média entre os dois valores do centro do conjunto ordenado.

Ex.: 7, 21, 13, 15, 10, 8, 9, 13

Ordenando : 7, 8, 9, 10, 13, 13, 15, 21

=> Md = (10+13)/2 = 11,5

50% dos valores do conjunto de dados estão até 11,5 e 50% dos valores do conjunto de dados estão a partir de 11,5

b) n é número impar

A mediana é a observação que está na posição $\frac{n+1}{2}$

Ex.: 2, 20, 12, 23, 20, 20, 23

Rol: 2, 8, 12, 12, 20, 20, 23

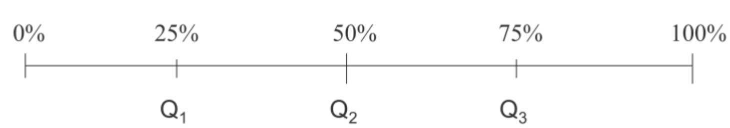
=> Posição = (7 + 1) / 2 = 4ª

=> Md = 12

- <u>Quartis</u>

São os números reais que dividem a sequência ordenada de dados em partes que contêm a mesma quantidade de elementos da série. (i% . n / 100)

Q1 , o primeiro quartil. Separa a sequência ordenada deixando 25% de seus valores à esquerda e 75% à direita. Q2 = Mediana (50% abaixo e 50% acima dele). Q3 , terceiro quartil, deixa 75% abaixo e 25% acima.



Seja a nota de uma amostra de nove alunos.

86 82 73 94 88 66 79 90 74 , ordenando os dados

66 73 74 79 82 86 88 90 94

Posição de Q1 = 25 . 9 / 100 = 2,25

Portanto, Q1 é a média entre 2º e 3º valores.

Q1 = (73 + 74) / 2 = 73,5 ou

(n+1)/4, se for 0,25 ou 0,75 arredondar

25% dos alunos obtiveram nota até 73,5 pontos e; 75% dos alunos obtiveram nota a partir de 73,5 pontos.

Q3 = (88 + 90) / 2 = 89

3(n+1) /4, se for na metade do caminho (0,5) calcula a média

75% dos alunos obtiveram nota até 89 pontos e; 25% dos alunos obtiveram nota a partir de 89 pontos.

Junto com uma medida de posição devemos calcular uma medida de dispersão (variabilidade) para mostrar o grau de afastamento dos valores observados em relação àquele valor representativo. Não basta saber o valor em torno do qual dos dados se concentram; é preciso conhecer também o grau de agregação, ou seja, definir e usar medidas da dispersão dos dados. Entre as medidas disponíveis, veremos as mais usadas: amplitude total, desvio padrão, variância e coeficiente de variação.

- Amplitude Total (At)

Esta medida é utilizada para avaliar o tamanho de uma série. É definida como diferença entre o maior e o menor valor de uma sequência numérica conforme a Equação 8.

Equação 8 – Amplitude Total (At)

$$A_t = X_{max} - X_{min} \qquad (8)$$

Seja o número diário de peças defeituosas: 4, 2, 3, 3, 6, 3

A_t = 6 -2 = 4

Quanto maior o resultado da At, maior é variabilidade presente no conjunto de dados.

- Variância e Desvio Padrão

São as duas principais medidas de variabilidade.

A variância pode ser calcula de acordo com a Equação 9.

Equação 9 – Variância amostral

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}\right] \tag{9}$$

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância conforme a Equação 10.

Equação 10 – Desvio padrão amostral

$$s = \sqrt{s^2} \tag{10}$$

A desvantagem da variância em relação ao desvio padrão é o fato de que sua unidade de medida é igual ao quadrado da unidade de medida dos dados originais. Considere o número diário de peças defeituosas : 4, 2, 3, 3, 6, 3

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}\right] = \frac{1}{6-1}\left[83 - \frac{(21)^2}{6}\right] = 1{,}9 \qquad s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1{,}9} = 1{,}38$$

O número diário de peças defeituosas distancia, em média, 1,38 peças em relação ao número médio.

- <u>Coeficiente de Variação</u>

Coeficiente de variação é medida que expressa a variabilidade em termos relativos comparando o desvio padrão com a média conforme a Equação 11.

Equação 11 – Coeficiente de Variação

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \tag{11}$$

Note que é importante expressar a variabilidade em termos relativos porque, por exemplo, um desvio padrão igual 1 pode ser muito pequeno se a magnitude dos dados é da ordem de 1.000, mas pode ser considerado muito elevado se a magnitude for da ordem de 10. Observe, também, que o coeficiente de variação é adimensional e por esse motivo ele permite a comparação das variabilidades de diferentes conjuntos de dados. Ele usualmente é expresso em %. Quanto menor o coeficiente de variação, mais homogêneo é o conjunto de dados.

Considere as amostras de comprimento de peças de dois fornecedores, conforme Tabela 2.

Tabela 2 – Comprimento de peças de dois fornecedores

	Fornecedor A	Fornecedor B
Fornecedores	70	66
	69	72
	71	67
	70	73
	70	72
	71	73
	69	67
Média	70	70
Desvio	0,82	3,16
CV (%)	1,17	4,52

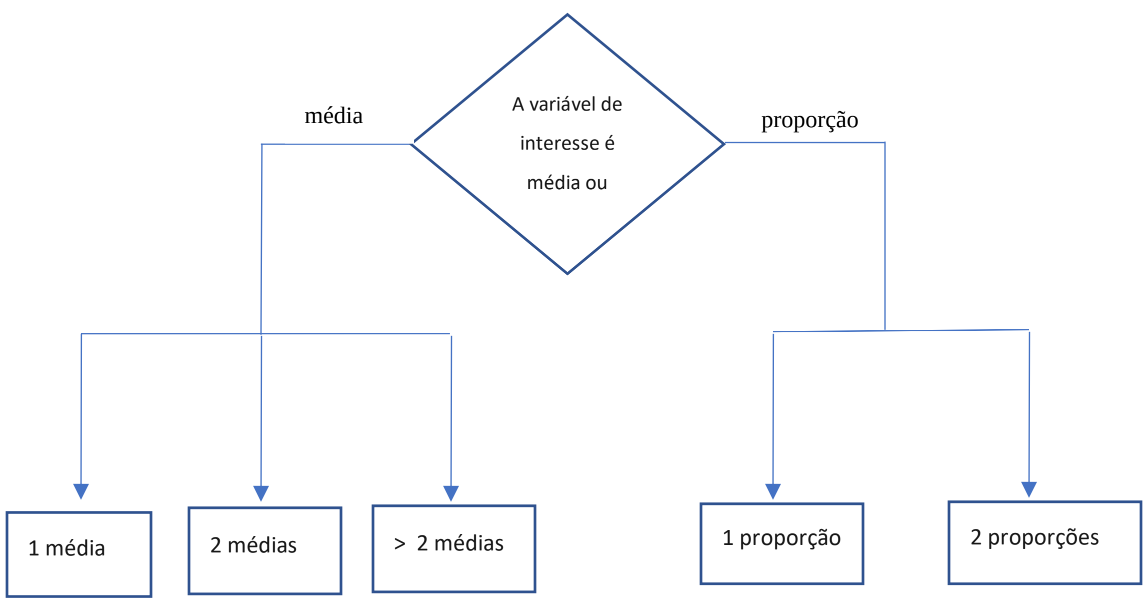
Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

Parece que o processo do fornecedor A apresenta uma menor variabilidade, pois 1,17% < 4,52%.

2.9 Inferência Estatística

É o processo de generalizar os resultados da amostra para a população. Por exemplo estimar o tempo médio para montar um determinado produto. Normalmente utilizamos os tempos de montagem de uma amostra e generalizamos os resultados para um grupo maior de peças (um lote) ou numa pesquisa para determinar o grau de satisfação dos clientes, utilizamos uma amostra de alguns e clientes e o que acontecer nesta amostra expandimos o resultado para todos os clientes da empresa (população). Esta inferência só pode ser realizada quando se utiliza amostras representativas da população. As principais inferências são para média e proporção da população de acordo com a Figura 12.

Figura 12 – Inferência para médias e proporções



Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

As técnicas mais utilizadas em inferência estatística são: Intervalos de confiança, Teste de Hipóteses, Análise de Variância (ANOVA), Planejamento de Experimentos e Estatística não paramétrica.

2.9.1 Inferência para uma média

São os intervalos de confiança e os testes de hipóteses dependendo do tamanho da amostra e se a distribuição dos dados segue uma distribuição normal. Quando usar cada fórmula está no Quadro 5.

Quadro 5 – Intervalos e Testes para uma média

Uma média		
$n \geq 30$	n< 30 (pop. normal)	n< 30 (pop. não normal) Intervalo e teste de sinais e teste de postos com sinais de Wilcoxon
$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2};n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$	R = mín (R^+, R^-) n <10
$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$	$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$	$z_0 = \frac{R-0,5n}{0,5\sqrt{n}}$ se n $\geq$10

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

- <u>n ≥ 30 ou desvio padrão conhecido de uma população normal</u>

O intervalo de confiança é:

Equação 12 – Intervalo de confiança para uma média n ≥ 30

$$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (12)$$

Onde:

$z_{\frac{\alpha}{2}}$ é obtido na tabela da Distribuição normal padronizada de acordo com uma determinada confiança.

A semi amplitude ($z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}}$) do intervalo é denominada precisão ou erro de estimativa.

O nível de confiança é estipulado pelo pesquisador. Quanto maior a importância do fenômeno (variável) estudado, maior deve ser a confiança utilizada. A padrão na área gerencial é 95% (softwares como Excel, Minitab e calculadoras já estão configurados com este valor) e na área médica 99%. Na dúvida, utilize 95% e justifique sua escolha dessa forma. Os valores mais utilizados da confiança e os respectivos valores de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ estão na Tabela 3.

Tabela 3 – Alguns valores de Z

Confiança (%)	$z_{\frac{\alpha}{2}}$
90	1,65
95	1,96
98	2,33
99	2,58

Fonte: EXTRAÍDO DE SOARES; FARIAS; CÉSAR. (2003).

Considere a amostra representativa de 30 peças.

	Comprimento	Amostra
6	74,0331	73,9282
7	70,7089	67,0608
8	73,2023	68,5394
9	68,2146	68,2146
10	69,6664	68,9636
11	68,9975	70,6587
12	72,0007	69,1526
13	65,7759	70,3333
14	68,2952	71,4466
15	66,7325	69,3095
16	71,4992	68,2632
17	69,3095	65,6267
18	70,1354	72,8351
19	68,7952	74,5797
20	73,4359	73,0898
21	66,4257	74,0940
22	68,2606	71,1810
23	72,8467	73,4359
24	71,2049	69,5914
25	69,1294	71,8311
26	67,9674	70,7165
27	71,4899	74,5946
28	72,8774	70,9326
29	69,1939	72,0926
30	74,5946	70,1354
31	74,0940	

O comprimento médio das 30 peças é de 70,322 cm e o desvio padrão 2,567 cm.

Da tabela Z temos $Z_{0,025}$ = 1,96

Intervalo de 95% de confiança para o comprimento médio das 200 é:

$$70{,}322 \pm 1{,}96 \times \frac{2{,}567}{\sqrt{20}}$$

70,322 ± 0,919

[69,403 ; 71,241]

O comprimento médio populacional está compreendido entre 69,4 e 71,2 cm com 95% de confiança.

Depois que a amostra é retirada e o I.C. for construído não se tem certeza se ele é correto ou não. Porém, se ele for suficientemente grande teremos maior confiança que ele é correto, pois a forma que ele é construído garante que em 100(1-α)% das vezes que ele é utilizado, ele está correto.

Então por que não aumentar cada vez mais o valor do coeficiente de confiança? Porque para n fixo, aumentar o valor do coeficiente de confiança significa aumentar o tamanho do intervalo e um I.C. muito largo não é desejável, pois é sua precisão é baixa. Recomenda-se utilizar um coeficiente da ordem 90, 95 e 99%.

Segundo Werkema (2014) antes de construir um I.C. deve-se fazer um planejamento amostral para a escolha do tamanho da amostra. Se n for inadequado o que pode acontecer:

- n < que o necessário

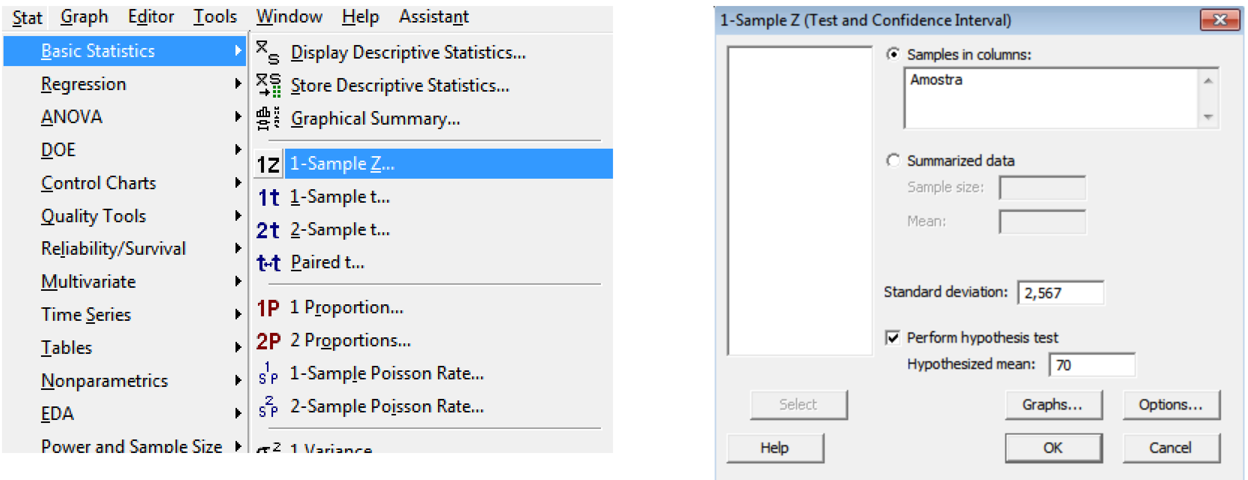
  I.C. muito longo $\Rightarrow$ Impossibilita a tomada de decisões.

- n > que o necessário

  I.C. muito estreito $\Rightarrow$ desperdício de tempo e dinheiro.

O cálculo no Minitab é conforme Figura 13.

Figura 13 –Intervalo de confiança (I.C.) para uma média quando n ≥ 30 no Minitab.



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

One-Sample Z: Amostra
Test of mu = 70 vs not = 70
The assumed standard deviation = 2,567

Variable	N	Mean	StDev	SE Mean	**95% CI**	**Z**	P
Amostra	30	70,322	2,567	0,469	**(69,404; 71,241)**	**0,69**	0,492

Uma hipótese estatística é uma afirmação sobre um ou mais parâmetros de uma população de acordo com Werkema (1995). A hipótese nula, representada por H_0 , é uma declaração sobre um parâmetro populacional que será considerada verdadeira até que seja obtida alguma prova em contrário. A hipótese alternativa representada por H_1 é uma declaração sobre um parâmetro populacional que será considerado verdadeiro se a hipótese nula for julgada falsa.

O procedimento de escolha entre as hipóteses nula e alternativa é chamado de Teste de Hipóteses de acordo com Montgomery *et al.* (2006). A variável aleatória cujo valor é utilizado para determinar a ação a ser seguida em um teste de hipóteses é denominada estatística de teste. O conjunto de valores de uma estatística de teste para os quais H_0 será rejeitada é denominado região crítica (ou rejeição) do teste.

A detecção de diferenças estatisticamente significativas não pode ser feita com certeza absoluta, pois a tomada de decisão baseada em amostras envolve a incerteza presente na estimativa dos parâmetros de interesse. Tudo que se pode fazer é estabelecer um balanço entre a probabilidade dos possíveis erros inerentes à tomada de decisão baseada em amostras, que estão mostrados na Tabela 4.

Tabela 4 – Decisões Possíveis e seus erros associados (em Termos de Hipóteses)

		Situação real e desconhecida	
		H_0 verdadeira	H_0 falsa
Decisão	Não rejeitar H_0	Decisão correta	Erro Tipo II
	Rejeitar H_0	Erro Tipo I	Decisão correta

Fonte: EXTRAÍDO DE WERKEMA (2014).

Segundo Werkema (2014) os procedimentos para realizar um teste de hipóteses são:

a) Identifique o parâmetro de interesse;
b) Estabeleça a hipótese nula, H_0;
c) Estabeleça uma hipótese alternativa apropriada, H_1;
d) Escolha o nível de significância (α);
e) Determine a Estatística de Teste apropriada;
f) Determine a região de rejeição do Teste;
g) Calcule o valor da Estatística de Teste;
h) Decida se H_0 deve ou não ser rejeitada;
i) Apresente a decisão no contexto do problema que está sendo analisado.

As hipóteses são $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$

A estatística de teste está na equação 13.

Equação 13 – Estatística de teste para uma média $n \geq 30$

Sob H_0, a estatística de teste é: $$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \qquad (13)$$

A regra de decisão é a seguinte: deve-se rejeitar H_0 se $|Z_0| > z_{\alpha/2}$. Onde $z_{\alpha/2}$ é obtido na tabela da distribuição normal padronizada.

Testar se o comprimento médio populacional é igual a 70.

$H_0 : \mu = 70$ $\qquad$ $H_1 : \mu \neq 70$

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{70{,}322 - 70}{2{,}567 / \sqrt{30}} = 0{,}69$$

Como 0,69 < 1,96 não se pode rejeitar a hipótese de que o comprimento médio populacional seja igual a 70 cm.

Este resultado é o mesmo gerado no *software* Minitab.

One-Sample Z: Amostra
Test of mu = 70 vs not = 70
The assumed standard deviation = 2,567

Variable	N	Mean	StDev	SE Mean	95% CI	Z	P
Amostra	30	70,322	2,567	0,469	(69,404; 71,241)	**0,69**	0,492

Outra medida muito utilizada é o P-valor de um teste. O p-valor (ou probabilidade de significância ou p) é a probabilidade de ocorrência do valor particular observado para a estatística de teste ou de valores mais extremos, na direção da região crítica, quando a hipótese nula H_0 é verdadeira segundo Werkema (1996).

Deve-se rejeitar H_0 se P-valor < α. Normalmente, os pacotes estatísticos calculam o P-valor. Valores pequenos de P-valor indicam que há baixa probabilidade de a amostra ter sido observada sob a hipótese de igualdade de um determinado valor μ_0.

Para o teste anterior tem-se :

P-valor = 2 P($Z \geq |z_0|$).= 2 [1- P ($Z \leq |0{,}69|$)] = 2 [1-0,7549] = 2 [1-0,001] = 0, 49 ou 49%

Não se deve rejeitar H_0, pois P-valor > 0,05

A vantagem de utilizar o p-valor é não precisar de valor tabelado. Basta comparar o p-valor com α.

Junto com o IC e TH o *software* Minitab tem-se o P-valor (P)

One-Sample Z: Amostra
Test of mu = 70 vs not = 70
The assumed standard deviation = 2,567

Variable	N	Mean	StDev	SE Mean	95% CI	**Z**	P
Amostra	30	70,322	2,567	0,469	(69,404; 71,241)	0,69	**0,492**

- <u>n < 30 de uma população com distribuição normal</u>

O intervalo de confiança é dado pela Equação 14:

Equação 14 – Intervalo de confiança para uma média com n < 30 de uma população normal

$$\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2};n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (14)$$

$t_{\frac{\alpha}{2};n-1}$ é obtido na tabela da Distribuição *t* de Student, com n-1 graus de liberdade(gl). À medida que o tamanho da amostra aumenta, a distribuição t se aproxima da Normal.

Considere um fornecedor enviou um lote de 1.000 peças. Foi extraída uma amostra de tamanho 15 para avaliar o comprimento médio (cm) das peças.

69 75 70 71 67 62 76 71 70 69 72 68 79 71 69

Construa um intervalor de 95% para o comprimento médio populacional.

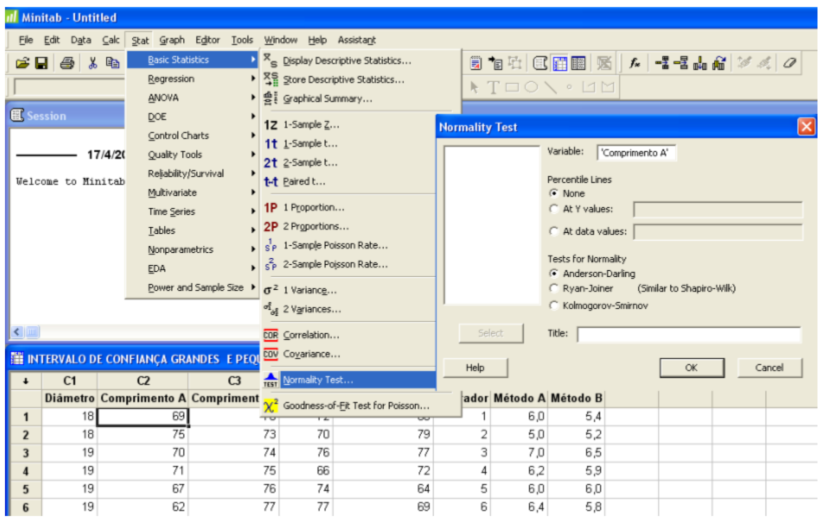
Para verificar a suposição de normalidade dos dados, deve-se realizar o teste de normalidade dos dados.

H_0 : Os dados seguem uma distribuição normal

H_1 : Os dados não seguem uma distribuição normal

Para essa análise, pode-se utilizar o *software* Minitab, como mostra a Figura 14.

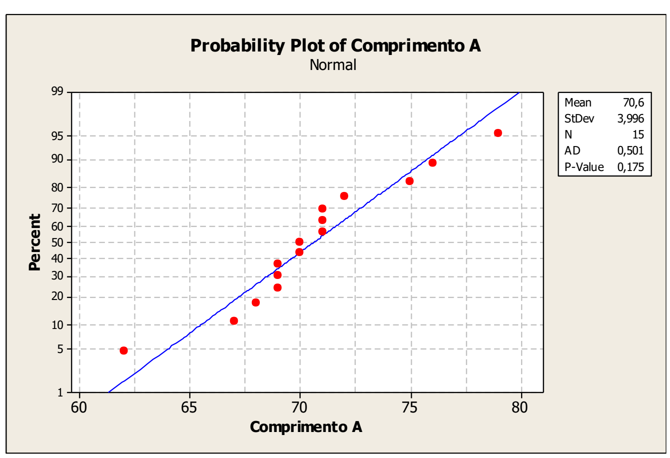
Figura 14 – Elaboração do teste de normalidade no *software* Minitab



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

A saída do *software* Minitab, de acordo com a Figura 15.

Figura 15 – Gráfico de probabilidade normal no *software* Minitab



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

Os pontos próximos de uma reta sugerem que os dados seguem uma distribuição normal. Quanto menor a estatística Anderson Darling (AD) melhor é o ajuste dos dados na distribuição Normal segundo Montgomery *et al* (2006).

Como o p-valor = 0,175 é alto, não se pode rejeitar H_0. Portanto, não se pode afirmar que os dados não seguem uma distribuição normal. Desta maneira, pode-se continuar a construção do intervalo de confiança.

O cálculo da média e do desvio padrão:

Descriptive Statistics: Comprimento A

Variable	N	N*	Mean	SE Mean	StDev	Minimum	Q1	Median	Q3
Comprimento A	15	0	**70,60**	1,03	**4,00**	62,00	69,00	70,00	72,00

Variable	Maximum
Comprimento A	79,00

Para encontrar o valor t tabelado, deve calcular o alfa = 100% - confiança α = 100% - 95% = 5% . Pode-se escrever em decimal também α = 0,05. Agora, divida alfa por 2 .

$\alpha/2 = 0{,}025$ é coluna da Tabela t.

A primeira coluna da tabela é gl (graus de liberdade). Nesta fórmula é gl = n-1

Então gl = 15 – 1 = 14

O valor tabelado da distribuição t de student é

$t_{0,025\,;\,14} = 2{,}145$

Tabela 5 – Valores da distribuição t de student

Distribuição t de Student P(T ≥ t) = prob.

				Prob.					
gl	0,20	0,15	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0010	0,0005
3	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,210	12,920
4	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,868	1,076	1,345	1,761	**2,145**	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
60	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,846	1,043	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416
100	0,845	1,042	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390
120	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
∞	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Fonte: Extraída de Montgomery; Ranger (2009).

Desta maneira o intervalo será:

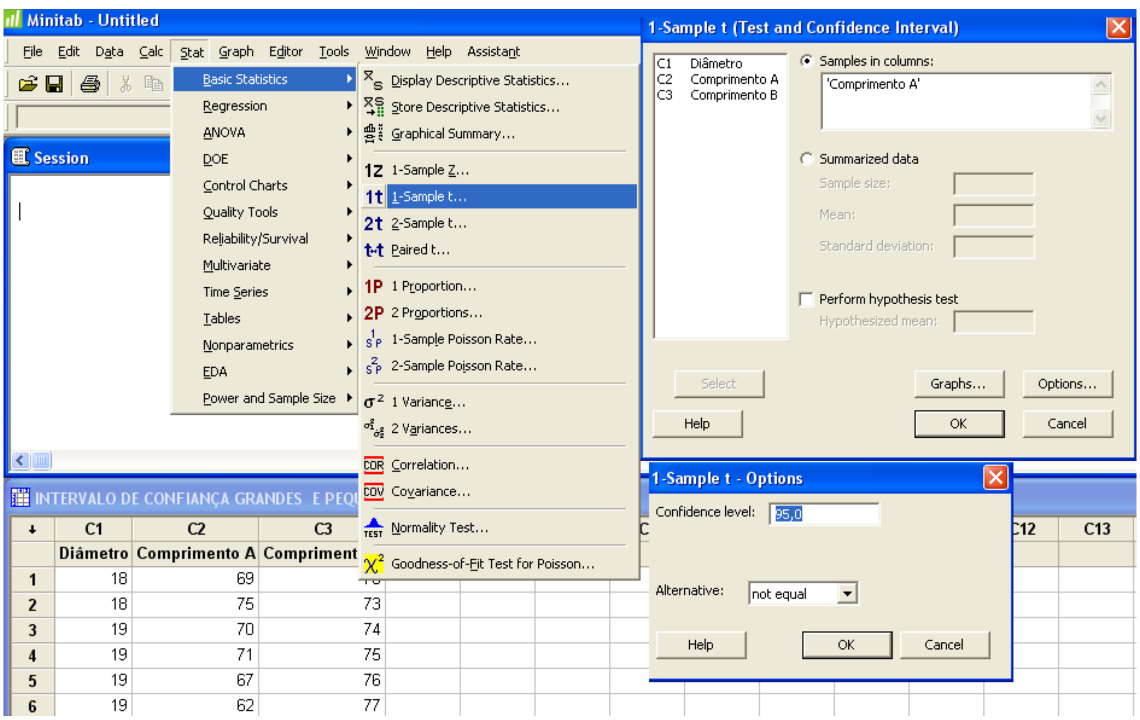
$$70{,}60 \pm 2{,}145\ \frac{4}{\sqrt{15}}$$

[68,39 ; 72,82]

A interpretação é a mesma do primeiro intervalo.

Para calcular no *software* Minitab, conforme Figura 16.

Figura 16 – Cálculo do I.C para uma média n<30 de uma população normal no *software* Minitab



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

One-Sample T: Comprimento A

Variable	N	Mean	StDev	SE Mean	95% CI
Comprimento A	15	70,60	4,00	1,03	**(68,39; 72,81)**

O teste de hipóteses para pequenas amostras de populações normais é o teste t.

$H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$

Equação 15 –Estatística de teste para média de pequenas amostras de populações normais

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \qquad (15)$$

Cálculo da média e o desvio padrão amostral

Descriptive Statistics: Comprimento A

Variable	N	N*	Mean	SE Mean	StDev	Minimum	Q1	Median	Q3
Comprimento A	15	0	70,60	1,03	4,00	62,00	69,00	70,00	72,00

Variable	Maximum
Comprimento A	79,00

$H_0 : \mu = 70$ vs $H_1 : \mu \neq 70$

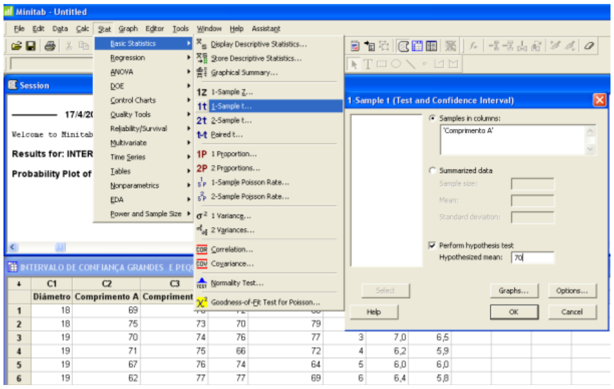
$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{70{,}60 - 70}{4 / \sqrt{15}} = 0{,}5801$$

$t_{0,025\,;\,14} = 2{,}145$

Como 0,58 < 2,145 não rejeitar. H_0. Não se pode afirmar que o comprimento médio populacional é diferente de 70 cm.

O cálculo no Minitab é feito como mostra a Figura 17.

Figura 17 – Teste de hipóteses para média de pequena amostra de população normal no Minitab



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

One-Sample T: Comprimento A

Test of mu = 70 vs not = 70

Variable	N	Mean	StDev	SE Mean	95% CI	T	P
Comprimento A	15	70,60	4,00	1,03	(68,39; 72,81)	**0,58**	0,570

- n < 30 de uma população não normal

Deve-se utilizar o teste de sinais. É um teste que pertence ao famílias os testes não paramétricos ou livres de distribuição. Geralmente são testes fáceis de aplicar e servem para pequenas amostras. Porém, os seus resultados são mais pobres que os testes paramétricos (Z e T) quando podemos supor distribuição normal aos dados.

Pode-se utilizar teste de sinais que trabalha com a mediana dos dados ou o teste de postos com sinais de Wilcoxon. A seguir detalha-se o teste de sinais.

Considere uma amostra de n valores. Testa-se se a mediana é igual a um determinado valor.

$H_0: \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0 \quad H_1: \tilde{\mu} \neq \tilde{\mu}_0$

Calcule as diferenças (x_i - $\tilde{\mu}_0$).
Quando a hipótese nula é verdadeira, o número de diferenças positivas é igual de diferenças negativas.

R^+ = número de diferenças positivas

R^- = número de diferenças positivas

Caso ocorra uma diferença igual a zero, desconsidere e faça o teste com as diferenças restantes.

A estatística de teste é:

R = mín (R^+, R^-)

Rejeitar H_0 se $R \leq R_\alpha$

R_α é um valor tabelado

Considere uma amostra de 12 notas. Testar se a mediana da população é igual a 10 pontos.

Tabela 6 – Amostra de 12 notas

Aluno	**Nota (x)**	**(x - 10)**	**sinal**
1	12	2	+
2	7,5	-2,5	-
3	10,5	0,5	+
4	13	3	+
5	12,5	2,5	+
6	7,8	-2,2	-
7	11,5	1,5	+
8	14	4	+
9	7,5	-2,5	-
10	13,2	3,2	+
11	11	1	+
12	10,8	0,8	+

Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

$R^+ = 9$, $R^- = 3$ e $R = \text{mín}(9, 3) = 3$. Considerando um alfa de 5%, temos $R_\alpha = 2$ da Tabela 7.

Tabela 7 – Valores de R_α

R_α^*							
n \ α	0,10	0,05	0,01	n \ α	0,10	0,05	0,01
5	0			23	7	6	4
6	0	0		24	7	6	5
7	0	0		25	7	7	5
8	1	0	0	26	8	7	6
9	1	1	0	27	8	7	6
10	1	1	0	28	9	8	6
11	2	1	0	29	9	8	7
12	2	2	1	30	10	9	7
13	3	2	1	31	10	9	7
14	3	2	1	32	10	9	8
15	3	3	2	33	11	10	8
16	4	3	2	34	11	10	9
17	4	4	2	35	12	11	9
18	5	4	3	36	12	11	9
19	5	4	3	37	13	12	10
20	5	5	3	38	13	12	10
21	6	5	4	39	13	12	11
22	6	5	4	40	14	13	11

Fonte: MONTGOMERY *ET AL.* (2006).

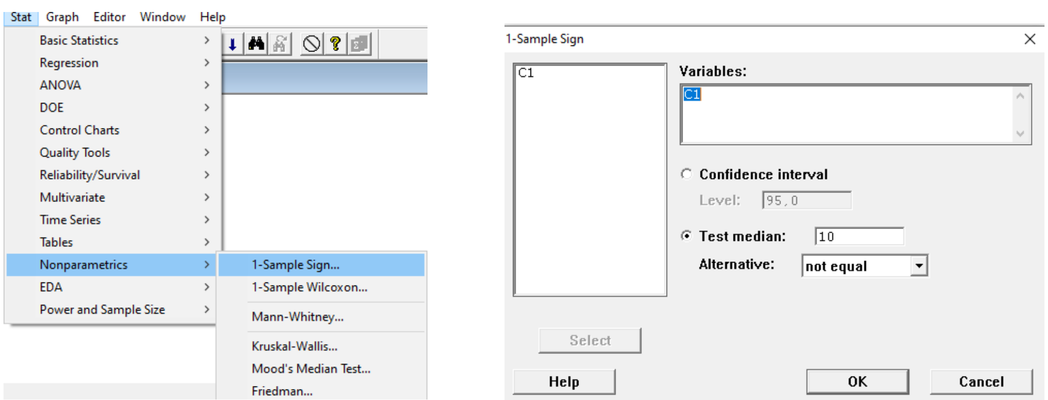
Como 3 > 2 não se pode rejeitar que a mediana seja igual a 10 pontos.

Quando n ≥10, pode-se usar a aproximação pela distribuição normal.

Equação 16 – Estatística de teste para o teste dos sinais usando a aproximação da distribuição normal

$$z_0 = \frac{R - 0{,}5n}{0{,}5\sqrt{n}} \tag{16}$$

Figura 18 –Teste dos sinais no *software* Minitab



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

Sign test of median = 10,00 versus not = 10,00

	N	Below	Equal	Above	**P**
C1	12	3	0	9	**0,1460**

Como p-valor (0,146) > 0,05 não se pode rejeitar H_0.

2.9.2 Inferência para 2 médias

Um problema que surge com frequência na prática consiste em decidir se as médias amostras provenientes duas populações são significantemente diferentes. Neste tópico, verifica-se a hipótese de igualdade de médias de duas populações através de intervalo de confiança e testes de hipóteses. As principais fórmulas estão no Quadro 6.

Quadro 6 – Principais técnicas para 2 médias e fórmulas

Duas médias					
Amostras independentes				Amostras dependentes (emparelhadas)	
n_1 e n_2 ≥ 30	n_1 e n_2 < 30			Populações normais	Populações não normais
	Populações normais		Populações não normais		
	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$			
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{\frac{\alpha}{2};\nu}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{\alpha/2;\nu}\, s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$	Teste dos sinais R = mín (R^+, R^-) Teste da soma dos postos de Wilcoxon R_1 = soma dos postos da amostra1 $z_0 = \frac{R1-\mu_R}{\sigma_R}$ Aproximação da normal	$\bar{d} \pm t_{\frac{\alpha}{2};n-1}\frac{s_d}{\sqrt{n}}$	Teste dos sinais para amostras emparelhadas ou testes de postos com sinais da diferença de Wilcoxon R = mín (R^+, R^-)
$z_0 = \frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}$	$t_0 = \frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}$	$t_0 = \frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$			

Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

- Amostras Independentes com n_1 e $n_2 <$ 30, populações normais e $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

O intervalo com 100(1-α)% de confiança para (μ_1- μ_2) é :

Equação 17 – I.C. para duas médias de amostras independentes (n1 e n2 <30) extraídas de populações normais

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{\frac{\alpha}{2};\nu}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}} \qquad (17)$$

Onde: $t_{\frac{\alpha}{2};\nu}$ é obtido na tabela da Distribuição *t* de Student, com graus de liberdade (gl) dado por:

Equação 18 – Graus de liberdade – Teste t para amostras independentes e variâncias diferentes

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(s_1^2 / n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2 / n_2\right)^2}{n_2 - 1}} \qquad (18)$$

As médias das populações são significativamente diferentes quando o valor zero (0) não pertence ao intervalo construído. Além disso, o intervalo estima a grandeza de diferença, caso ela exista.

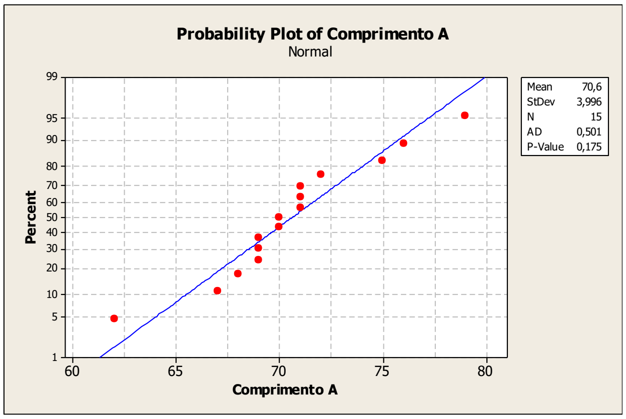
Considere um processo de seleção de fornecedores. A variável analisada é o comprimento (cm) médio das peças. Após avaliação preliminar, dois fornecedores foram selecionados. Para decidir qual o melhor fornecedor, foi solicitada uma amostra de uma população normal de 15 peças para cada um.

Comp. A	69	75	70	71	67	62	76	71	70	69	72	68	79	71	69
Comp. B	70	73	74	75	76	77	75	76	75	72	76	74	73	77	78

Construir um IC de 95% para a diferença entre as médias. Qual fornecedor é melhor? A empresa necessita de peças com 70 cm.

Verificar a suposição de normalidade dos dados do fornecedor A, conforme Figura 19.

Figura 19 – Teste de normalidade dos dados do fornecedor A

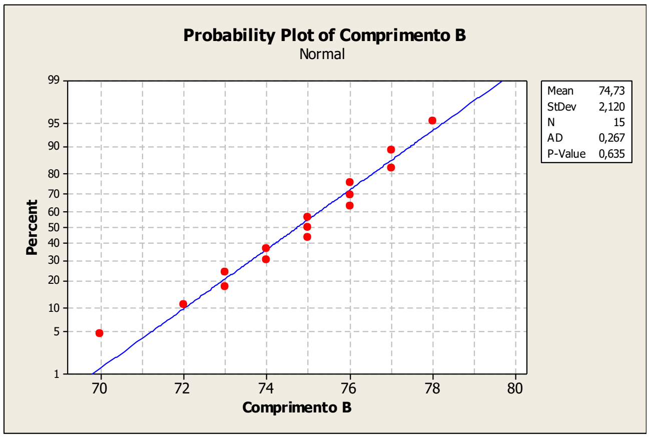


Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

Como o p-valor = 0,175 > 0,05 não se pode rejeitar a hipótese de normalidade.

Para fornecedor B, temos, conforme Figura 20.

Figura 20 – Teste de normalidade dos dados do fornecedor B



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

Como o p-valor = 0,635 > 0,05 não se pode rejeitar a hipótese de normalidade.

Cálculo das médias e dos desvios

	N	Mean	StDev
Comprimento A	15	70,60	4,00
Comprimento B	15	74,73	2,12

Os graus de liberdade são:

$$\nu = \frac{\left(\frac{4^2}{15} + \frac{2{,}12^2}{15}\right)^2}{\frac{(4^2/15)^2}{15_1 - 1} + \frac{(2{,}12^2/15)^2}{15-1}} = 21$$

$t_{0{,}025\,;\,21} = 2{,}080$

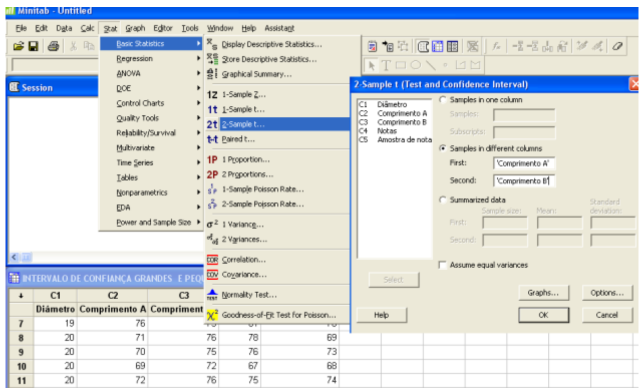
$$70{,}60 - 74{,}73 \pm 2{,}080\sqrt{\frac{4^2}{15} + \frac{2{,}12^2}{15}}$$

[-6,56; -1,70]

Como o valor zero não pertence ao IC, pode-se concluir que os comprimentos médios são diferentes com uma confiança de 95%. Como o comprimento médio do fornecedor A é mais próximo de 70, o fornecedor A é melhor.

No *software* Minitab (Stat / Basic Statistics / 2 sample t), como mostra a Figura 21:

Figura 21 – I.C. para duas médias de amostras independentes (n1 e n2 <30) extraídas de populações normais no Minitab



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

Two-Sample T-Test and CI: Comprimento A; Comprimento B
Difference = mu (Comprimento A) - mu (Comprimento B)
Estimate for difference: -4,13
95% CI for difference: **(-6,56; -1,70)**
T-Test of difference = 0 (vs not =): T-Value = -3,54 P-Value = 0,002 **DF = 21**

O teste de hipóteses é:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$

A equação para estatística de teste é:

Equação 19 – Estatística de teste para duas médias (n_1 e $n_2 <$ 30 populações normais)

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \tag{19}$$

A hipótese nula H_0 deverá ser rejeitada se $|t_0| > t_{\frac{\alpha}{2};\nu}$. Onde: $t_{\frac{\alpha}{2};\nu}$ é obtido na tabela da Distribuição *t* de Student na Tabela.

Considere os dados do exemplo anterior e teste se as duas médias são iguais com nível de confiança de 5%.

	N	Mean	StDev
Comprimento A	15	70,60	4,00
Comprimento B	15	74,73	2,12

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{70{,}60 - 74{,}73}{\sqrt{\frac{(4)^2}{15} + \frac{(2{,}12)^2}{15}}} = -3{,}53$$

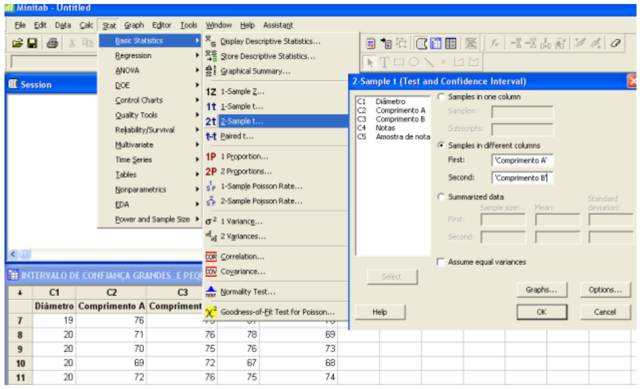
Os graus de liberdade são:

$$\nu = \frac{\left(\frac{4^2}{15} + \frac{2{,}12^2}{15}\right)^2}{\frac{(4^2/15)^2}{15_1 - 1} + \frac{(2{,}12^2/15)^2}{15 - 1}} = 21 \quad , \quad t_{0{,}025\,;\,21} = 2{,}080$$

Como | -3,53 | > 2,080 deve-se rejeitar H_0. Portanto as médias não são iguais. Esta conclusão é a mesma quando utilizou-se o intervalo de confiança, pois são técnicas equivalentes.

De acordo com a Figura 22, no *software* Minitab (Stat / Basic Statistics / 2 sample t):

Figura 22 – T.H. para duas médias (n_1 e $n_2 < 30$), populações normais no Minitab



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

Two-Sample T-Test and CI: Comprimento A; Comprimento B
Difference = mu (Comprimento A) - mu (Comprimento B)
Estimate for difference: -4,13
95% CI for difference: (-6,56; -1,70)
T-Test of difference = 0 (vs not =): **T-Value = -3,54** P-Value = 0,002 DF = 21

Na situação em que as variâncias das duas populações em estudo são supostas iguais, teremos:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad \nu = n_1 + n_2 - 2 \qquad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{\alpha/2;\nu}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \qquad s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

É um caso mais específico aonde deve-se testar se as variâncias são iguais. Contudo, pode-se usar a fórmula de variâncias diferentes sem se preocupar com o teste de igualde das variâncias.

- Amostras Independentes com n_1 e $n_2 \geq 30$

Quando as amostras são grandes, isto é, cada uma igual ou maiores que 30, utiliza-se o intervalo e o teste com a distribuição normal. O intervalo é:

Equação 20 – Intervalo de confiança para duas médias com amostras independentes e maiores ou iguais a 30

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \qquad (20)$$

A estatística de teste é:

Equação 21 – Estatística de teste para duas médias de amostras independentes e maiores ou iguais a 30

$$z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \qquad (21)$$

Rejeitar Ho se $z_0 > z_{\frac{\alpha}{2}}$

Considere as notas de duas turmas de Estatística (Tabela 8). Testar se as notas médias populacionais são iguais com alfa de 5%.

Tabela 8 – Notas de duas turmas de Estatística

Turma A	**Turma A**	**Turma B**	**Turma B**
20,6	19,09	21,01	22,39
20,2	18,69	21,42	20,53
20,5	23,13	19,05	19,64
18,92	18,11	17,14	20,22
21,42	18,47	21,49	19
20,09	19,93	18,89	18,02
19,47	21,61	18,94	22,89
17,43	20,59	20,42	19,81
22,98	20,55	17,08	18,71
23,26	21,71	19,87	18,79
20,89	18,19	21,07	20,12
19,91	19,98	23,59	18,51
18,53	19,53	20,02	19,45
20,17	21,32	19,2	21,47
20,76	20,74	16,89	17,99
17,49	21,06	22,52	19,05
21,64	20,49	16,39	18,32
18,81	21,72	21,34	17,94
19,27	23,6	17,37	19,55
22,05	20,6	21,96	20,29

Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

O cálculo das médias e dos desvios é:

Turma	n	média	desvio

A	40	20,3375	1,5379
B	40	19,7088	1,7387

O intervalo de confiança é:

$$20,3375 - 19,7088 \pm 1,96\sqrt{\frac{1,5379^2}{40}+\frac{1,7387^2}{40}} \qquad [\,-0,0907\;;\;1,3481]$$

Como o zero pertence ao intervalo não se pode rejeitar a igualdade entre as notas médias com 95% de confiança.

O teste de hipóteses é:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$$z_0 = \frac{20,3375 - 19,7088}{\sqrt{\frac{1,5379^2}{40}+\frac{1,7387^2}{40}}} = 1,71$$

Como $1,71 < 1,96$ não podemos rejeitar H_0.

- <u>Amostras Independentes com n_1 e $n_2 < 30$, populações não normais</u>

Considere duas populações contínuas independentes.

As hipóteses são: H0: $\mu 1 = \mu 2$ H1: $\mu 1 \neq \mu 2$.

O procedimento do teste de acordo com Montgomery *et al.* (2006) é

Ordene todas as n1 + n2 observações em ordem crescente e associe postos a elas.

Caso ocorra empate para duas ou mais observações, use a média dos postos que teriam sido associados se as observações fossem diferentes.

Faça R1 igual a soma dos postos da amostra1.

Equação 22 – Cálculo de R2 para teste de duas médias de populações não normais

$$R2 = n1(n1+n2+1) - R1 \tag{22}$$

Quando as duas médias não diferem, é esperado que a soma dos postos seja aproximadamente a mesma para ambas as amostras. A hipótese nula deve ser rejeitada se R1 ou R2 for menor ou igual a um valor tabelado $R\alpha$

Exemplo extraído de Montgomery *et al.* (2006): Está-se estudando o esforço axial médio em membros extensíveis usados na estrutura de aeronaves. Duas ligas estão sendo investigadas. A liga 1 é um material tradicional e a liga 2 é uma nova liga de alumínio e lítio, muito mais leve que o material padrão. Dez elementos de cada liga são testados, medindo-se o esforço axial.

A Figura 23 apresenta os valores das ligas 1 e 2.

Figura 23 – Valores das ligas 1 e 2 para o teste soma dos postos de Wilcoxon

Liga 1	Liga 2
3238	3261
3195	3187
3246	3209
3190	3212
3204	3258
3254	3248
3229	3215
3225	3226
3217	3240
3241	3234

Fonte: EXTRAÍDO DE MONTGOMERY *ET AL.* (2006).

Colocando em ordem crescente os valores das ligas 1 e 2, conforme Figura 24.

Figura 24 – Postos dos valores das ligas 1 e 2 em ordem crescente

	Liga	Posto
3187	2	1
3190	1	2
3195	1	3
3204	1	4
3209	2	5
3212	2	6
3215	2	7
3217	1	8
3225	1	9
3226	2	10
3229	1	11
3234	2	12
3238	1	13
3240	2	14
3241	1	15
3246	1	16
3248	2	17
3254	1	18
3258	2	19
3261	2	20

Fonte: EXTRAÍDO DE MONTGOMERY *ET AL.* (2006).

R1 = 2+3+4+8+9+11+13+15+16+18 = 99

R2 = n1(n1+n2+1) – R1 = 10(10+10+1) -99 =111

Pela tabela 9 com n1=n2= 10 e alfa = 0,005 tem-se um R = 78

Como nem R1 nem R2 são menores que 78 não se pode rejeitar a hipótese de igualdade das Ligas.

Tabela 9 – Rα para o teste de Wilcoxon de duas amostras com alfa de 5¨%

n_2 \ n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4			10											
5		6	11	17										
6		7	12	18	26									
7		7	13	20	27	36								
8	3	8	14	21	29	38	49							
9	3	8	15	22	31	40	51	63						
10	3	9	15	23	32	42	53	65	78					
11	4	9	16	24	34	44	55	68	81	96				
12	4	10	17	26	35	46	58	71	85	99	115			
13	4	10	18	27	37	48	60	73	88	103	119	137		
14	4	11	19	28	38	50	63	76	91	106	123	141	160	
15	4	11	20	29	40	52	65	79	94	110	127	145	164	185
16	4	12	21	31	42	54	67	82	97	114	131	150	169	
17	5	12	21	32	43	56	70	84	100	117	135	154		
18	5	13	22	33	45	58	72	87	103	121	139			
19	5	13	23	34	46	60	74	90	107	124				
20	5	14	24	35	48	62	77	93	110					
21	6	14	25	37	50	64	79	95						
22	6	15	26	38	51	66	82							
23	6	15	27	39	53	68								
24	6	16	28	40	55									
25	6	16	28	42										
26	7	17	29											
27	7	17												
28	7													

Fonte: EXTRAÍDO DE MONTGOMERY *ET AL*. (2006).

Quando ambos n1 e n2 são moderadamente grandes, diga-se maiores que 8, a distribuição de R1 pode ser bem aproximada pela distribuição normal, de acordo com Montgomery *et al.* (2006).

Equação 23 – Estatística de teste para teste duas médias amostras pequenas não normais usando a aproximação normal

$$z_0 = \frac{R_1 - \mu_{R1}}{\sigma_{R1}} \tag{23}$$

Rejeitar H_0 se $|Z_0| > z_{\alpha/2}$

A média e o desvio de R1 são:

Equação 24 – Média de R1

$$\mu_{R1} = \frac{n1(n1 + n2 + 1)}{2} \tag{24}$$

Equação 25 – Variância de R1

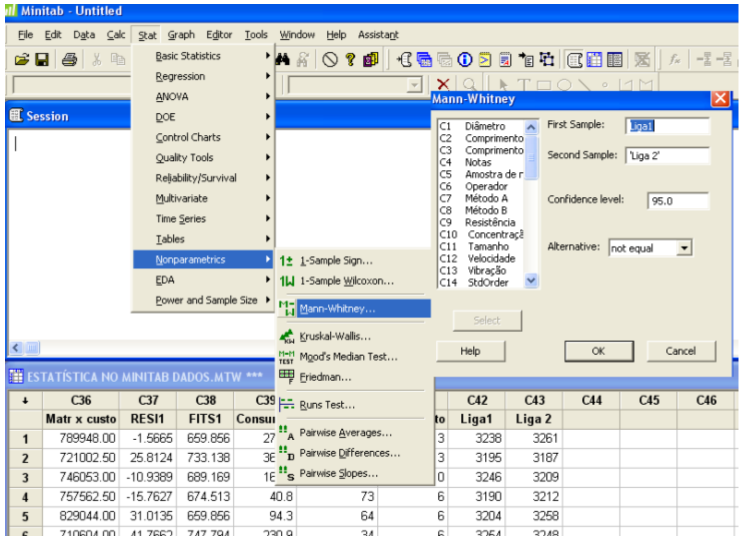
$$\sigma^2_{R1} = \frac{n1\, n2(n1 + n2 + 1)}{12} \tag{25}$$

$$\mu_{R1} = \frac{10(10+10+1)}{2} = 105 \qquad \sigma^2_{R1} = \frac{10x10(10+10+1)}{12} = 175 \qquad \sigma_{R1} = 13{,}22 \qquad z_0 = \frac{99 - 105}{13{,}23} = -0{,}45$$

Como 0,45 é menor que 1,96 não se rejeita H_0. Pode-se concluir utilizando o p-valor. P-valor = 2P(Z > 0,45) = 2(1- 0,673645) = 0,65. Como 0,65 > 0,05 não se têm evidências para rejeitar H_0.

No *software* Minitab o teste equivalente ao do Wilcoxon é do Mann-Whitney para duas medianas, conforme Figura 25.

Figura 25 – Teste Mann-Whitney (equivalente ao teste de soma dos postos de Wilcoxon) para duas medianas no Minitab



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

Mann-Whitney Test and CI: Liga1, Liga 2

	N	Median
Liga1	10	3227.0
Liga 2	10	3230.0

Point estimate for ETA1-ETA2 is -6.0
95.5 Percent CI for ETA1-ETA2 is (-29.0,17.0)
W = 99.0
Test of ETA1 = ETA2 vs ETA1 not = ETA2 is significant at **0.6776**

O *software* Minitab calcula o valor de Z usando uma correção de continuidade da seguinte maneira:

$$z_0 = \frac{\left|R1 - \mu_{R1}\right| - 0{,}5}{\sigma_{R1}} = \frac{\left|99 - 105\right| - 0{,}5}{13{,}23} = 0{,}42$$

Desta maneira, o p-valor = 2(1-0,662) = 0,676. Este valor é bem próximo do calculado do Minitab. Como o p-valor = 0,676 > 0,05 não se tem evidências para rejeitar a hipótese de igualdade entre as medianas.

- <u>Amostras dependentes de populações normais</u>

As amostras até agora foram consideradas independentes. Considere o caso de amostras emparelhadas.

O intervalo de confiança é:

Equação 26 – Intervalo de confiança para duas amostras emparelhadas ou dependentes extraídas de populações normais

$$\bar{d} \pm t_{\frac{\alpha}{2};n-1} \frac{s_d}{\sqrt{n}} \quad (26)$$

Onde:

t é um valor tabelado da distribuição t de student com n-1 graus de liberdade.

As amostras devem ter sido extraídas de uma população normal. Isto deve ser testado.

Uma empresa de manufatura possua dois métodos pelos quais os empregados podem realizar uma tarefa. Cada operador deverá utilizar os dois métodos. Será que existe diferença entre os métodos? Deve-se coletar o tempo para cada método e calcular a diferença (d) entre os pares de valores.

Calcula-se a média e o desvio da diferença. Agora basta aplicar os I.Cs vistos anteriormente.

Considere dois métodos de produção. A empresa possui 6 empregados. Conforme Tabela 10.

Tabela 10 – Operadores, tempos (minutos), métodos e diferenças

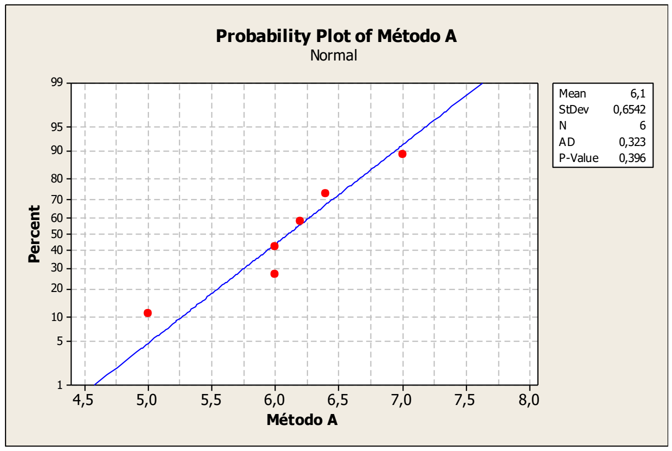
Operador	**TP M1**	**TP M2**	**Diferença (d)**
1	6	5,4	0,6
2	5	5,2	-0,2
3	7	6,5	0,5
4	6,2	5,9	0,3
5	6	6	0
6	6,4	5,8	0,6

Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020)

Deve-se testar a suposição de que as amostras foram extraídas de populações normais.

A Figura 26 apresenta o teste de normalidade para o método A.

Figura 26 – Teste de normalidade para o método A

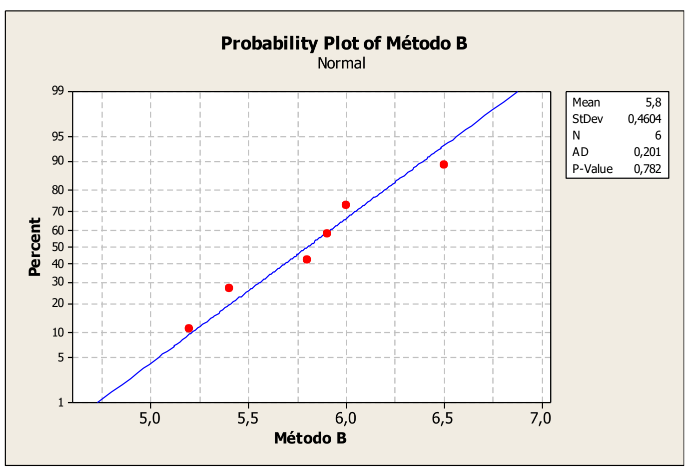


Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

Como 0,396 > 0,05 não se pode rejeitar a hipótese de normalidade dos dados.

Para o método B, tem-se, conforme mostra a Figura 27.

Figura 27 – Teste de normalidade para o método B



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

Como 0,782 > 0,05 não se pode rejeitar a hipótese de normalidade dos dados.

A média da coluna diferença foi de 0,3 minutos e o desvio padrão da diferença de 0,335 minutos. Considerando um I.C de 95% e n =6, tem-se:

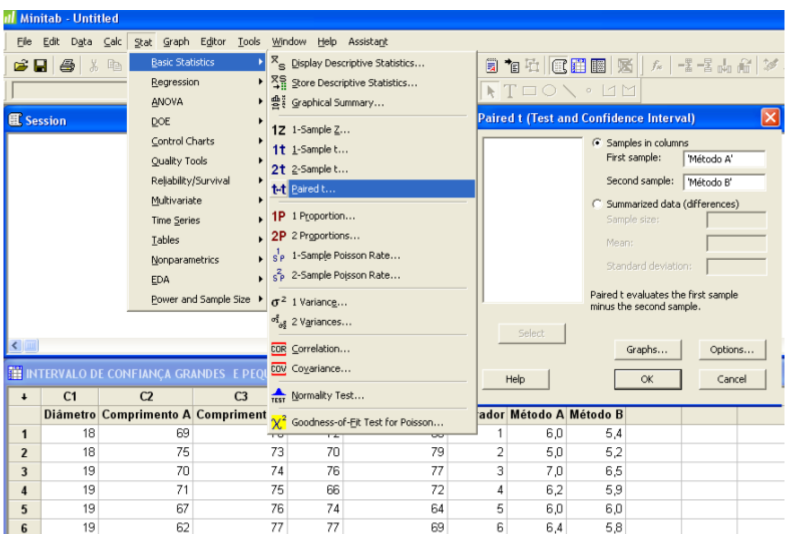
$$0{,}3 \pm 2{,}571\ x\ \frac{0{,}335}{\sqrt{6}}$$

[-0,0516 ; 0,6515]

Como o zero está no intervalo, não se pode dizer que os métodos sejam estatisticamente diferentes.

Cálculo no *software* Minitab pode ser visto na Figura 28.

Figura 28 – – I.C para duas amostras dependentes extraídas de populações normais no *software* Minitab



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

Paired T-Test and CI: Método A; Método B

Paired T for Método A - Método B

	N	Mean	StDev	SE Mean
Método A	6	6,100	0,654	0,267
Método B	6	5,800	0,460	0,188
Difference	6	0,300	0,335	0,137

95% CI for mean difference: **(-0,051; 0,651**)

T-Test of mean difference = 0 (vs not = 0): T-Value = 2,20 P-Value = 0,080

O teste de hipóteses é $H_0 : \mu_D = 0$ $H_1 : \mu_D \neq 0$ com a seguinte estatística de teste:

Equação 27 – Estatística de teste para duas amostras dependentes extraídas de populações normais

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n}} \tag{27}$$

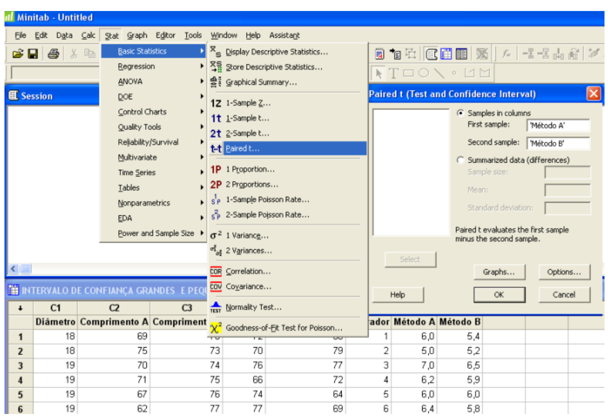
Rejeitar H_0 se $|t_0| > t_{\alpha / 2;\, n-1}$. Onde $t_{\alpha / 2; n-1}$ é obtido na tabela da t de Student.

$$t_0 = \frac{0,3}{0,335 / \sqrt{6}} = 2,19 \qquad t_{0,025;\ 5} = 2,57$$

Como 2,19 < 2,57 não rejeitar H_0. Os dados não fornecem evidências que os métodos sejam diferentes.

O cálculo no *software* Minitab apresenta-se na Figura 29.

Figura 29 – – T.H. para duas amostras dependentes extraídas de populações normais no *software* Minitab



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

Paired T-Test and CI: Método A; Método B

Paired T for Método A - Método B

	N	Mean	StDev	SE Mean
Método A	6	6,100	0,654	0,267
Método B	6	5,800	0,460	0,188

Difference 6 0,300 0,335 0,137

95% CI for mean difference: (-0,051; 0,651)

T-Test of mean difference = 0 (vs not = 0): **T-Value = 2,20** P-Value = 0,080

- Amostras dependentes de populações não normais

Dois testes podem ser utilizados o teste de sinais para amostras emparelhadas e o teste da soma dos postos com sinais de Wilcoxon.

Neste trabalho, utiliza-se o teste de sinais de acordo com Montgomery *et al* (2006).

$H_0: \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 \quad H_1: \tilde{\mu}_1 \neq \tilde{\mu}_2$
Testar $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$ é equivalente mediana das diferenças ser igual a zero ($\tilde{\mu}_d$ =0).

Considere duas amostras em pares de valores (x_{1i} , x_{2i}). Faça a diferença $d_i = x_{1i} - x_{2i}$. Quando a hipótese nula é verdadeira, o número de diferenças positivas é igual de diferenças negativas.

R^+ = número de diferenças positivas. R^- = número de diferenças negativas.

Caso ocorra uma diferença igual a zero, desconsidere e faça o teste com as diferenças restantes.

A estatística de testes é:

R = mín (R^+, R^-). Rejeitar H_0 se $R \leq R_\alpha$.

R_α é um valor tabelado.

Considere o tempo de montagem de um produto antes e depois de um treinamento, de acordo dom a Tabela 11.

Tabela 11 – Tempo de montagem de um produto antes e depois de um treinamento

Operador	Antes	Depois	Diferença	Sinal
1	12	11,2	0,8	+
2	13	12,5	0,5	+
3	11	10	1	+
4	12,5	12	0,5	+
5	13	13,2	-0,2	-
6	10,4	10	0,4	+
7	11,8	11	0,8	+
8	12,7	12,5	0,2	+
9	14	13	1	+
10	14,5	14,2	0,3	+
11	13	12,5	0,5	+
12	12,6	12	0,6	+

Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

Testar se existe diferença entre os tempos medianos antes e depois do treinamento. Considere um alfa de 5% e n1= n2 = 12.

$H_0: \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 \quad H_1: \tilde{\mu}_1 \neq \tilde{\mu}_2$

$R^+ = 11$, $R^- = 1$ e $R = \text{mín}(11, 1) = 1$

Considerando um alfa de 5%, tem-se $R_\alpha = 2$ da Tabela 12.

Tabela 12 – Valores R_α

n \ α	0,10	0,05	0,01	n \ α	0,10	0,05	0,01
	R_{α}^{*}						
5	0			23	7	6	4
6	0	0		24	7	6	5
7	0	0		25	7	7	5
8	1	0	0	26	8	7	6
9	1	1	0	27	8	7	6
10	1	1	0	28	9	8	6
11	2	1	0	29	9	8	7
12	2	2	1	30	10	9	7
13	3	2	1	31	10	9	7
14	3	2	1	32	10	9	8
15	3	3	2	33	11	10	8
16	4	3	2	34	11	10	9
17	4	4	2	35	12	11	9
18	5	4	3	36	12	11	9
19	5	4	3	37	13	12	10
20	5	5	3	38	13	12	10
21	6	5	4	39	13	12	11
22	6	5	4	40	14	13	11

Fonte: EXTRAÍDO DE MONTGOMERY *ET AL.* (2006).

Rejeitar H_0, pois 1 < 2. Conclui-se que existe diferença entre os tempos medianos antes e depois do treinamento com um nível de significância de 5%. O treinamento está sendo eficiente, pois temos 11 diferenças positivas e 1 negativa, isto é, tempo depois do treinamento é menor.

2.9.3 Mais de 2 médias

Quando precisa-se comparar mais de duas médias ou grupos os procedimentos disponíveis são os que estão apresentados no Quadro 7.

Quadro 7 – Principais técnicas para comparar mais de 2 médias

Mais de 2 médias	
Amostras independentes e populações normais – ANOVA	Populações não normais - Kruskal-Wallis
$F_o = \dfrac{MQ_{tratamentos}}{MQ_{erro}}$	$H = \dfrac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{a} \dfrac{R_{i.}^2}{ni} - 3(N+1)$

Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

- <u>Amostras independentes e populações normais</u>

De acordo com Montgomery *et al.* (2006), a análise de variância (ANOVA) é a técnica utilizada para determinar se as médias de três ou mais populações são iguais, baseado na análise de variâncias amostrais. O teste é elaborado a partir de amostras independentes extraídas de cada população normal. Quando a suposição de normalidade não puder ser comprovada, devemos utilizar o teste não paramétrico denominado Teste de Kruskal Wallis.

Uma alternativa para testar a igualdade de quatro médias ($Ho = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$) seria testar as combinações de pares de médias utilizando o teste t ao nível de 5%. Isto acarretaria em seis testes de hipóteses com um grau de confiança de $0{,}95^6 = 0{,}735$. Em geral, à medida que aumentamos o número de testes individuais, aumentos a possibilidade de encontrarmos diferença apenas casual. Consequentemente, aumentamos o erro tipo I. A análise de variância permite evitar este aumento do erro tipo I através da utilização de um único teste de igualdade de várias médias segundo com Montgomery *et al.* (2006).

Considerações para aplicação da Análise de Variância segundo Montgomery; Ranger (2009):

a) As amostras devem ser aleatórias e independentes;
b) As amostras devem ser extraídas de populações normais;
c) As populações devem ter variâncias iguais.

As exigências de normalidade e igualdade de variâncias podem ser violadas, pois os métodos funcionam razoavelmente bem, a menos que a distribuição seja fortemente não normal ou as variâncias populacionais sejam muito diferentes. Desde que os tamanhos das amostras sejam quase iguais podemos aceitar uma diferença de 9 vezes entre a maior e a menor variância de acordo com Montgomery *et al.* (2006).

As médias podem ser provenientes da realização de experimento. Segundo Montgomery; Ranger (2009) experimentos são uma parte natural na tomada de decisões. Considere, por exemplo, que um engenheiro esteja investigando os efeitos de diferentes métodos de cura sobre a resistência compressiva do concreto. O experimento consistiria em produzir vários corpos de prova de concreto utilizando cada um dos métodos propostos de cura e então testar a resistência compressiva de cada espécime. Os dados deste experimento poderiam ser utilizados para fornecer a máxima resistência compressiva média.

Se houver somente dois métodos de cura que sejam de interesse, esse experimento poderia ser planejado e analisado usando os métodos de hipóteses (teste t ou z) para duas amostras. Neste caso, teríamos um único fator de interesse – métodos de cura – e há somente dois **níveis** do fator.

Muitos experimentos com um único fator exigem que mais de dois níveis do fator sejam considerados. Por exemplo, o engenheiro pode querer investigar cindo métodos diferentes de cura. A técnica utilizada nesta situação é a Análise de Variância.

Um exemplo extraído de Montgomery *et al.* (2006): Um fabricante de papel para produção de sacos de supermercados está interessado em melhorar a força da resistência do seu produto. Da engenharia do produto, acredita-se que a força de resistência seja em função da concentração de madeiras de lei na polpa e que gama dessas concentrações de interesse prático seja de 5% a 20%. A equipe de engenheiros responsável pelo estudo decide investigar quatro níveis de concentração: 5%, 10%, 15% e 20%. Eles decidem também preparar seis espécimes de teste em cada nível de concentração, usando uma fábrica piloto. Todos os 24 espécimes foram testados em laboratório, em ordem aleatória.

Os dados estão a seguir, conforme Tabela13.

Tabela 13 – Resistência em função da concentração de madeira - ANOVAo

Concentração de madeira (%)	**Observações**						**Totais**	**Médias**
	1	2	3	4	5	6		
5	7	8	15	11	9	10	60	10
10	12	17	13	18	19	15	94	15,67
15	14	18	19	17	16	18	102	17
20	19	25	22	23	18	20	127	21,17
Total							383	15,96

Fonte: EXTRAÍDA DE MONTGOMERY *ET AL* (2006).

Esse é um exemplo de um experimento completamente aleatorizado de um fator com quatro níveis. Os níveis do fator são as vezes chamados de tratamentos (devido as primeiras aplicações na área agrícola) e cada tratamento tem seis observações ou replicações. Ao aleatorizar a ordem dos 24 testes, os efeitos de quaisquer variáveis de ruído que possam influenciar a força de resistência são aproximadamente equilibrados.

Considere que haja um efeito do aquecimento sobre a máquina de teste, ou seja, quanto mais tempo de uso da máquina maior a força de resistência. Caso os 24 testes sejam realizados na ordem crescente da concentração de madeira de lei (primeiramente todos de 5% de concentração, depois os 10%, etc.) então as diferenças encontradas na força de resistência poderiam também ser devidas ao efeito do aquecimento.

Considere que há ***a*** diferentes níveis de um único fator que queremos comparar. A resposta para cada um dos ***a*** níveis (tratamentos) é uma variável aleatória. No exemplo anterior temos a=4 tratamentos. Cada um com n=6 observações.

Os dados podem ser esquematizados como o Quadro 8.

Quadro 8 – Dados típicos da ANOVA

Dados típicos para um Experimento de um Fator						
Tratamento		Observações			Totais	Médias
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1n}	$y_{1.}$	$\bar{y}_{1.}$
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2n}	$y_{2.}$	$\bar{y}_{2.}$
.	.	.	...	.		
.	.	.	...	.		
.	.	.	...	.		
a	y_{a1}	y_{a2}	...	y_{an}	$y_{a.}$	$\bar{y}_{a.}$
					$y_{..}$	$\bar{y}_{..}$

Fonte: EXTRAÍDO DE MONTGOMERY *ET AL*. (2006).

Onde:
y_{ij} representa a j.ª observação feita sob o tratamento i.
n é o número de observações em cada tratamento.

A análise de variância particiona a variabilidade total na amostra em duas partes. Assim, o teste de hipóteses é baseado na comparação de duas estimativas independentes da variância populacional. Vamos comparar a diferença entre amostras (tratamentos) e a diferença dentro da amostra (tratamento).

Segundo Montgomery *et al.* (2006) a variabilidade total nos dados é descrita pela soma de quadrados total.

Equação 28 – Soma de Quadrados Total

$$SQ_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij} - \overline{y}_{..}\right)^2 \qquad (28)$$

A soma de quadrados total é diferença entre cada observação e média geral. Pode-se particionar esta soma de quadrados total.

Equação 29 – Composição do SQT

$$SQ_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij} - \overline{y}_{..}\right)^2 = n\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{..}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij} - \overline{y}_{i.}\right)^2 \qquad (29)$$

Pode-se verificar que a soma de quadrados total é dividida na soma de quadrados das diferenças entre as médias dos tratamentos e a média geral, e na soma de quadrados das diferenças entre as observações dentro de cada tratamento e a média do respectivo tratamento.

Diferenças entre médias de tratamentos observadas e média geral quantificam diferenças entre tratamentos. Diferenças das observações dentro de um tratamento e média do tratamento podem ser devidas apenas a um erro aleatório.

Pode-se escrever:

Equação 30 – SQT como soma do SQtrat e SQerro

$$SQ_T = SQ_{tratamentos} + SQ_{Erro} \tag{30}$$

Pode-se definir o valor esperado dos tratamentos e dos erros como a seguir:

$MQ_{tratramentos} = SQ_{tratamentos}/(a-1)$ é denominada média quadrática dos tratamentos.

$MQ_{erro} = SQ_{erro} / a(n-1)$ é a média quadrática do erro e um estimador da variância.

Os denominadores indicam os graus de liberdade de cada soma de quadrado. A estatística de teste é:

Equação 31 – Estatística teste F_0 para ANOVA

$$F_o = \frac{MQ_{tratamentos}}{MQ_{erro}} \tag{31}$$

Ela possui distribuição F com a-1 e a(n-1) graus de liberdade de acordo com Montgomery *et al.* (2006). Além disso, se a hipótese nula for falsa (existe diferença entre as médias), o valor esperado de $MQ_{tratamenos}$ é maior que MQ_{erro}.

Desta maneira, sob a hipótese alternativa, o valor esperado do numerador da estatística de teste é maior do que o do denominador. Consequentemente, deve-se rejeitar H_0 para grandes valores de F_o. Isto leva a um teste unilateral superior. Portanto, deve-se rejeitar H_0 se $F_o > F_{\alpha, (a-1), a(n-1)}$.
O cálculo das somas dos quadrados pode ser facilitado por fórmulas resumidas.

Equação 32 – Soma dos Quadrados Total – SQT (versão resumida)

$$SQ_T = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N} \tag{32}$$

Equação 33 – Soma dos Quadrados dos Tratamentos – SQtrat

$$SQ_{Tratamentos} = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i.}^2}{n} - \frac{y_{..}^2}{N} \qquad (33)$$

A soma dos quadrados dos erros é obtida pela subtração como:

Equação 34 – Soma dos Quadrados dos Erros - SQerro

$$SQ_{Erro} = SQ_T - SQ_{tratamentos} \qquad (34)$$

Exemplo extraído de Montgomery *et al.* (2006): Considere a força de resistência de sacos papel. Vamos usar a análise de variância para testar a hipótese de que diferenças concentrações de madeira não afetam a força de resistência do papel.

As hipóteses são H_o: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$ e H_1: Pelo menos uma média é diferente.

Vamos utilizar um nível de significância de 5%, isto é, α = 0,05, conforme Tabela 14.

Tabela 14 – Teste dos níveis de concentração - nível de significância

Concentração de madeira (%)	Observações						Totais	Médias
	1	2	3	4	5	6		
5	7	8	15	11	9	10	60	10
10	12	17	13	18	19	15	94	15,67
15	14	18	19	17	16	18	102	17
20	19	25	22	23	18	20	127	21,17
Total							383	15,96

Fonte: EXTRAÍDA DE MONTGOMERY *ET AL* (2006)

Assim:

$$SQ_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N} = 7^2 + 8^2 + \ldots + 20^2 - \frac{383^2}{24} = 512{,}96$$

$$SQ_{Tratamentos} = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i.}^2}{n} - \frac{y_{..}^2}{N} = \frac{60^2 + 94^2 + 102^2 + 127^2}{6} - \frac{383^2}{24} = 382{,}79$$

$$SQ_{Erro} = 512{,}96 - 382{,}79 = 130{,}17$$

$MQ_{tratramentos} = SQ_{tratamentos}/(a-1) = 382{,}79 / (4-1) = 127{,}60$

$MQ_{erro} = SQ_{erro} / a(n-1) = 130{,}17 / 4(6-1) = 6{,}51$

A estatística de teste é:

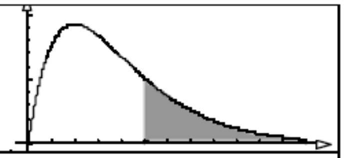
$$F_o = \frac{MQ_{tratamentos}}{MQ_{erro}} = \frac{127{,}60}{6{,}51} = 19{,}61$$

O valor tabelado de F de acordo com a Figura 30 é $F_{\alpha, (a-1), a(n-1)}$.= $F_{0,05, 3, 20} = 3{,}10$

Figura 30 – Valores da distribuição F

Distribuição F de Snedecor

$\alpha = 0,05$



gl denominador	*gl* numerador									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
45	4,06	3,20	2,81	2,58	2,42	2,31	2,22	2,15	2,10	2,05
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93

Fonte: EXTRAÍDO DE MONTGOMERY *ET AL.* (2006).

Como Fo é maior que o valor tabelado (19,60 > 3,10), deve-se rejeitar Ho. Os dados fornecem evidências que existem diferenças entre as médias.

A tabela geral da ANOVA é de acordo com o Quadro 9.

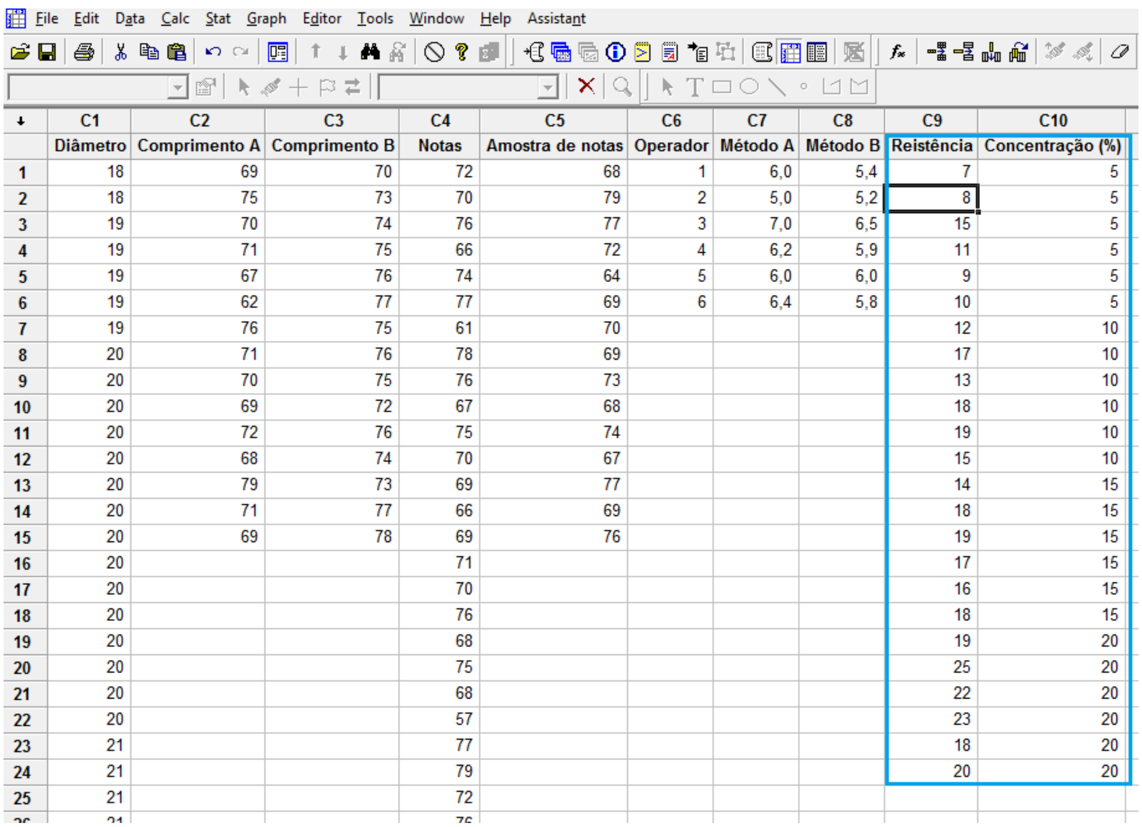
Quadro 9 – Tabela da ANOVA

Análise de Variância (ANOVA)				
Fonte de variação	Soma dos quadrados	Graus de liberdade	Média Quadrática	Fo
Tratamentos	$SQ_{tratamentos}$	a-1	$MQ_{tratmentos}$	MQ_{Trat}/ MQ_{E}
Erro	SQ_{Erro}	a(n-1)	MQ_{erro}	
Total	SQ_{total}	an-1		

Fonte: EXTRAÍDO DE MONTGOMERY *ET AL*. (2006).

Digite a resposta (resistência) numa coluna e o tratamento (concentração) em outra coluna, conforme Figura 31.

Figura 31 – Dados completos do exemplo no *software* Minitab para ANOVA.

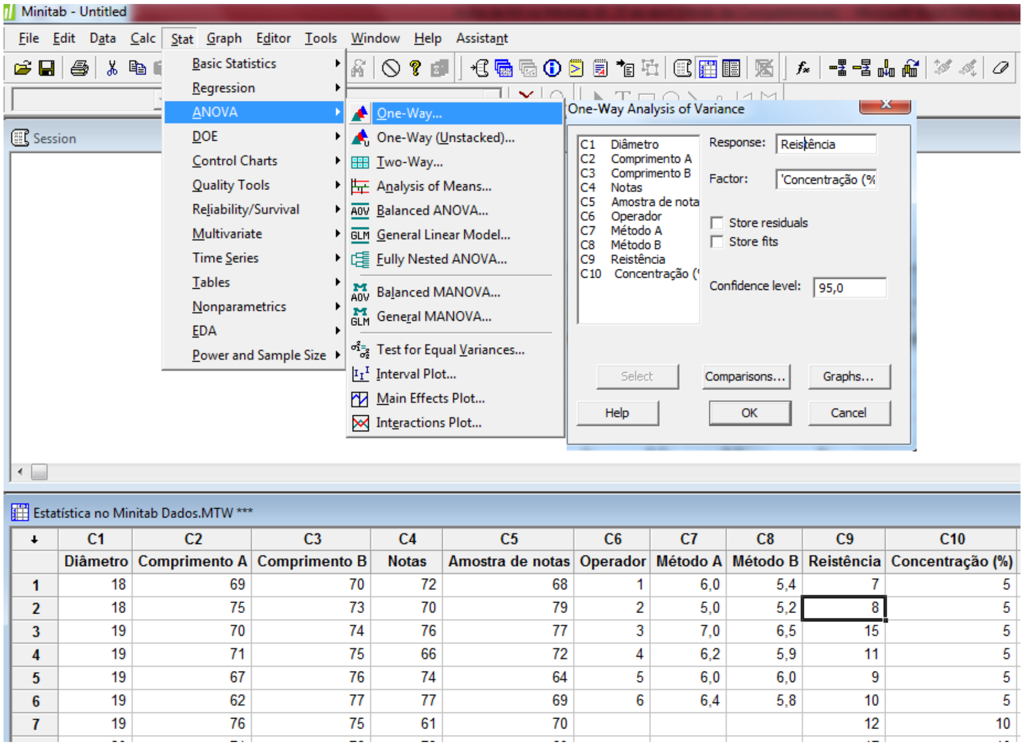


	C1 Diâmetro	C2 Comprimento A	C3 Comprimento B	C4 Notas	C5 Amostra de notas	C6 Operador	C7 Método A	C8 Método B	C9 Reistência	C10 Concentração (%)
1	18	69	70	72	68	1	6,0	5,4	7	5
2	18	75	73	70	79	2	5,0	5,2	8	5
3	19	70	74	76	77	3	7,0	6,5	15	5
4	19	71	75	66	72	4	6,2	5,9	11	5
5	19	67	76	74	64	5	6,0	6,0	9	5
6	19	62	77	77	69	6	6,4	5,8	10	5
7	19	76	75	61	70				12	10
8	20	71	76	78	69				17	10
9	20	70	75	76	73				13	10
10	20	69	72	67	68				18	10
11	20	72	76	75	74				19	10
12	20	68	74	70	67				15	10
13	20	79	73	69	77				14	15
14	20	71	77	66	69				18	15
15	20	69	78	69	76				19	15
16	20			71					17	15
17	20			70					16	15
18	20			76					18	15
19	20			68					19	20
20	20			75					25	20
21	20			68					22	20
22	20			57					23	20
23	21			77					18	20
24	21			79					20	20
25	21			72						

Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

Cálculo no *software* Minitab para ANOVA conforme Figura 32.

Figura 32 – Cálculo da ANOVA no *software* Minitab



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

One-way ANOVA: Resistência versus Concentração (%)

Source	DF	SS	MS	F	P
Concentração (%)	3	382,79	127,60	**19,61**	0,000
Error	20	130,17	6,51		
Total	23	512,96			

S = 2,551   R-Sq = 74,62%   R-Sq(adj) = 70,82%

```
                          Individual 95% CIs For Mean Based on Pooled StDev
Level  N    Mean  StDev   +---------+---------+---------+---------
 5     6  10,000  2,828   (----*----)
10     6  15,667  2,805              (----*-----)
15     6  17,000  1,789                 (----*-----)
20     6  21,167  2,639                          (-----*----)
                          +---------+---------+---------+---------
                         8,0      12,0      16,0      20,0
```

Esta saída do *software* Minitab corrobora com os cálculos manuais.

- <u>Amostras independentes e populações não normais</u>

O teste de Kruskal-Wallis é teste não paramétrico utilizado para testar se três ou mais amostras são provenientes da mesma população. Este teste não requer normalidade dos dados como na ANOVA de acordo com Triola (2017).

Segundo Triola (2017) as suposições para o teste de Kruskal-Wallis são:

a) Temos ao menos três amostras (todas aleatórias);
b) Cada amostra possui pelo menos cinco observações;
c) As variâncias são iguais.

Coleta-se k amostras cada uma com tamanho n, totalizando N observações. Ordena-se as N observações e calcula-se a soma dos postos de cada amostra. Desta maneira:

R1 = soma dos postos da amostra 1

R2 = soma dos postos da amostra 2

Rk = soma dos postos da amostra k

H_0: As populações são iguais

H_1: Existe diferença entre as populações

A estatística de teste é:

Equação 35 – Estatística de teste. Teste de Kruskal-Wallis

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{a} \frac{R_{i.}^2}{ni} - 3(N+1) \tag{35}$$

Que pode ser escrita assim:

Equação 36 – Estatística de teste alternativa. Teste de Kruskal-Wallis

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \left(\frac{R_1^2}{n_1} + \frac{R_2^2}{n_2} + \cdots + \frac{R_k^2}{n_k} \right) - 3(N+1) \tag{36}$$

Rejeitar H_0 se H > χ^2_{k-1} aonde χ^2_{k-1} é o valor crítico da distribuição qui-quadrado com k-1 graus de liberdade.

Sejam as amostras do tempo de montagem de uma peça em função do operador, conforme Tabela 15.

Tabela 15 – Amostras do tempo de montagem de uma peça em função do operador

Tempo	**Op**	**Postos**
10	1	5
12	1	10
10.7	1	7
9.3	1	3
11	1	8
14	2	13
13.5	2	12
15	2	15
12.5	2	11
14.1	2	14
10.2	3	6
9.8	3	4
9	3	2
8.7	3	1
11.3	3	9

Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

Desta maneira, tem-se:

H_0 : Os tempos dos três operadores são provenientes da mesma população
H_1 : Os tempos são de populações diferentes

K = 3 n1 = n2=n3 = 5 N = 3(5) = 15

R1 = 5 + 10 + 7 + 3 + 8 = 33

R2 = 13 + 12 + 15 + 11 + 14 = 65

R3 = 6 + 4 + 2 + 1 + 9 = 22

Assim:

$$H = \frac{12}{15(15+1)}\left(\frac{33^2}{5}+\frac{65^2}{5}+\frac{22^2}{5}\right) - 3(15+1) = 9{,}98$$

Usando um alfa de 5%, tem-se pela Figura 33 $\chi^2_{0,05;2} = 5{,}991$

Figura 33 – Valores da distribuição χ^2

ν \ α	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,500	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1	0,00+	0,00+	0,00+	0,00+	0,02	0,45	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	1,39	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	2,37	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	3,36	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	4,35	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	5,35	10,65	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	6,35	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	8,34	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	10,34	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	11,34	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	12,34	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	13,34	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,27	7,26	8,55	14,34	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	15,34	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	16,34	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,87	17,34	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	18,34	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	19,34	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	20,34	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	21,34	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	22,34	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	23,34	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	24,34	34,28	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	25,34	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	26,34	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65
28	12,46	13,57	15,31	16,93	18,94	27,34	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	28,34	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	29,34	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	39,34	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	49,33	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	59,33	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	69,33	85,53	90,53	95,02	100,42	104,22
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	79,33	96,58	101,88	106,63	112,33	116,32
90	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	89,33	107,57	113,14	118,14	124,12	128,30
100	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	99,33	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17

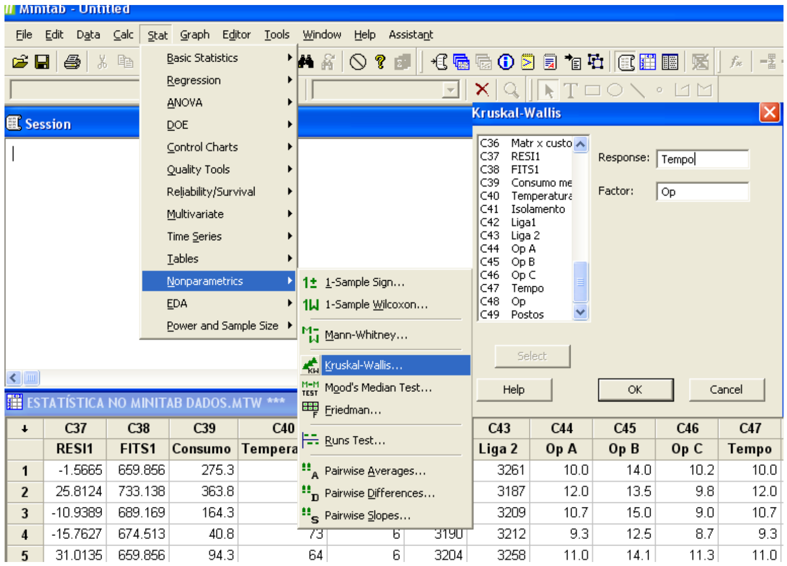
[a] ν = graus de liberdade.

Fonte: EXTRAÍDO DE MONTGOMERY *ET AL.* (2006).

Como 9,98 > 5,991 rejeitar H_0. Existe diferença entre os tempos dos operadores.

A realização do teste de Kruskall Wallis no Minitab está Figura 34.

Figura 34 – Teste de Kruskall Wallis no *software* Minitab



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

Kruskal-Wallis Test: Tempo versus Op

Kruskal-Wallis Test on Tempo

Op	N	Median	Ave Rank	Z
1	5	10.700	6.6	-0.86
2	5	14.000	13.0	3.06
3	5	9.800	4.4	-2.20
Overall	15		8.0	

H = 9.98 DF = 2 **P = 0.007**

Rejeitar H_0, pois 0,007 < 0,05.

2.9.4 Inferência para uma Proporção

Os intervalos e os testes de hipóteses para uma proporção estão no Quadro 10.

Quadro 10 – Principais intervalos e testes para uma proporção

Uma proporção	
np ≥ 5 e n(1-p) ≥ 5 (aproximação normal)	np < 5 e n(1-p) < 5 (sem aproximação)
$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$	$\frac{x}{x+(n-x+1)F_1} \leq P \leq \frac{(x+1)F_2}{(x+1)F_2+(n-x)}$
$\hat{p} \pm \left[z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} + \frac{1}{2n} \right]$ correção de continuidade	
$z_0 = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-p_0)}{n}}}$	Teste exato usando da distribuição binomial X = número de elementos da amostra com a característica de interesse. Rejeita Ho se X ≥ c ou X < c

Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

- <u>Amostra grande e np ≥ 5 e n(1-p) ≥ 5 com aproximação da normal</u>

Seja **x** o número de elementos de uma amostra de tamanho **n** da população que possuem o atributo ou característica de interesse com probabilidade de sucesso **p**. O objetivo é estabelecer um intervalo de confiança para a proporção populacional P.

Considerando que np ≥ 5 e n(1-p) ≥ 5, o intervalo com 100(1-α)% de confiança para o parâmetro P é dado por:

Equação 37 – Intervalo de confiança para uma proporção quando np ≥ 5 e n(1-p) ≥ 5

$$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \qquad (37)$$

Onde:

$z_{\frac{\alpha}{2}}$ é obtido na tabela da Distribuição normal padronizada.

Seja um lote de 1.500 peças. Foi extraída uma amostra de 100 peças onde 8 foram classificadas como defeituosas. Construa um intervalo de 95% para a proporção de peças defeituosas.

Desta maneira, tem-se que n = 100 e x = 8 e $\hat{p} = \frac{8}{100} = 0{,}08\ ou\ 8\%$

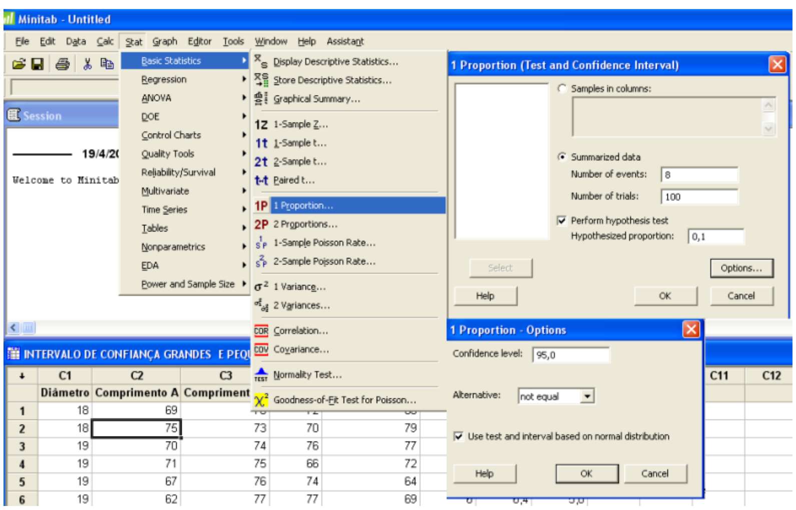
$$0{,}08\ \pm 1{,}96\ \sqrt{\frac{0{,}08(1-0{,}08)}{100}}$$

[0,0268 ; 0,1332]

A proporção de peças defeituosas está neste intervalo com 95% de confiança.

O cálculo no *software* Minitab, de acordo com a Figura 35.

Figura 35 – I.C. para proporção no *software* Minitab



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

Test and CI for One Proportion

Test of p = 0,1 vs p not = 0,1
Sample X N Sample p 95% CI Z-Value P-Value
1 8 100 0,080000 (**0,026828; 0,133172**) **-0,67** 0,505

Using the normal approximation.

As hipóteses são: $H_0 : P = p_0$ vs $H_1 : P \neq p_0$.

Equação 38 – Estatística de teste para uma proporção quando np ≥ 5 e n(1-p) ≥ 5

A estatística de teste é:

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-p_0)}{n}}} \tag{38}$$

A regra de decisão é a seguinte: devemos rejeitar H_0 se $|Z_0| > z_{\alpha/2}$. Onde $z_{\alpha/2}$ é obtido na tabela da distribuição normal padronizada.

Testar se a proporção de peças defeituosas em todo o lote é de 10% ? Use um alfa de 5%.

$H_0 : P = 0{,}1$ vs $H_1 : P \neq 0{,}1$

$$z_0 = \frac{0{,}08 - 0{,}1}{\sqrt{0{,}1(1-0{,}1)/100}} = -0{,}67$$

O valor tabelado é $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Como 0,67 < 1,96 não rejeitar . Os dados não fornecem evidências que a proporção populacional de defeitos seja diferente de 10%.

No *software* Minitab:

Test and CI for One Proportion

Test of p = 0,1 vs p not = 0,1

Sample	X	N	Sample p	95% CI	Z-Value	P-Value
1	8	100	0,080000	(0,026828; 0,133172)	**-0,67**	0,505

Using the normal approximation.

Caso a amostra seja grande podemos utilizar um fator de correção de continuidade para que a aproximação fique boa segundo Freund, Simon (2000). A fórmula é:

Equação 39 – Fator de correção de continuidade para amostras grandes no I.C. de proporção

$$\hat{p} \pm \left[Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} + \frac{1}{2n} \right] \tag{39}$$

Caso a amostra grande (n) represente mais de 5% da população finita (N) de acordo com Freund e Simon (2000) deve-se utilizar a fórmula:

Equação 40 – I.C. para proporção quando a amostra representa mais de 5% da população finita (N)

$$\hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})(N-n)}{n(N-1)}} \tag{40}$$

- <u>Amostra pequena e np < 5 e n(1-p) < 5</u>

Para o intervalo de confiança de Fisher usando a distribuição F segundo Werkema (2014), a fórmula é:

Equação 41 – Intervalo de confiança para uma proporção quando np < 5 e n(1-p) < 5

$$\frac{x}{x+(n-x+1)F_1} \leq P \leq \frac{(x+1)F_2}{(x+1)F_2+(n-x)} \tag{41}$$

Onde:

x = número de sucessos na amostra de tamanho n

$F_1 = F_{\alpha/2\,;\,2(n-x+1),\,2x}$

$F_2 = F_{\alpha/2\,;\,2(x+1),\,2(n-x)}$

Uma amostra de 21 peças apresentou 2 defeituosas. Construir um intervalo de 90% para a proporção de defeitos.

n =21 x = 2 e α = 0,10

$F_1 = F_{\alpha/2\,;\,2(n-x+1),\,2x}$

Os valores são extraídos da Figura 36 a seguir.

$F_{0,05\,;\,2(21-2+1),\,2(20)} \Rightarrow F_{0,05\,;\,40,\,4} = 5{,}72 \Rightarrow F_1 = 5{,}72$

$F_{0,05\,;\,2(2+1),\,2(21-2)} \Rightarrow F_{0,05\,;\,6,\,38} = 2{,}34 \Rightarrow F_2 = 2{,}34$

Figura 36 – Tabela F para o teste de proporção

$F_{0,05,\nu_1,\nu_2}$

Graus de liberdade para o numerador (ν_1)

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,55	1,43
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32

Fonte: EXTRAÍDA DE MONTGOMERY *ET AL.* (2006).

Caso a tabela possua o valor exato dos graus de liberdade, utilize o mais próximo.

O intervalo é

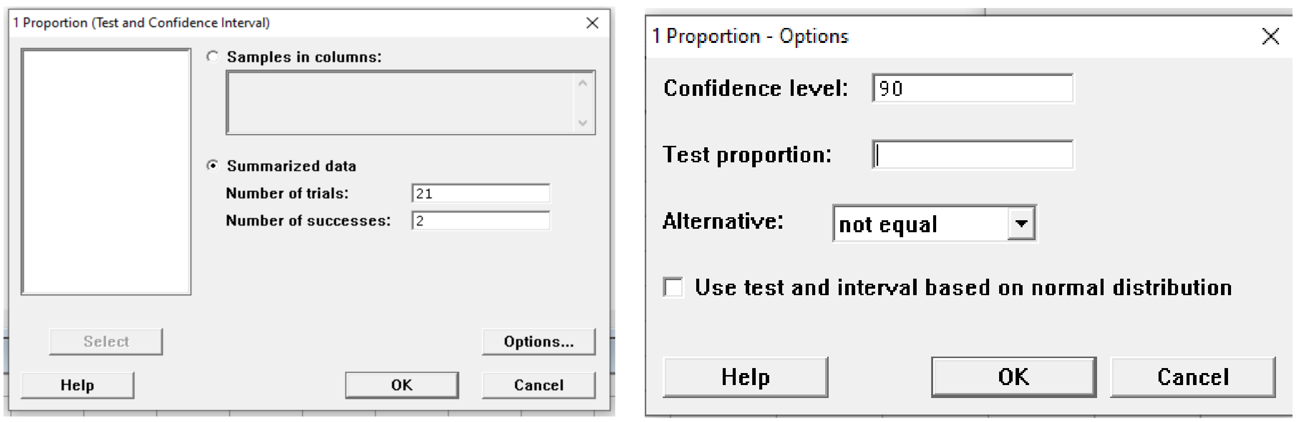
$$\frac{2}{2+(21-2+1)5{,}72} \leq P \leq \frac{(2+1)2{,}34}{(2+1)2{,}34+(21-2)}$$

[0,0172 ; 0,27]

A proporção populacional está neste intervalo com 90% de confiança.

O cálculo no *software* Minitab é o mostrado na Figura 37.

Figura 37 – Intervalo de confiança de Fisher para uma proporção no *software* Minitab



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

Test and CI for One Proportion

Test of p = 0,1 vs p not = 0,1

Sample	X	N	Sample p	Exact 90,0% CI	P-Value
1	2	21	0,095238	**(0,017191; 0,270552)**	1,000

Caso tenha feito uma aproximação nos graus de liberdade para consultar a tabela F pode ocorrer uma pequena diferença no limite inferior ou superior do intervalo.

O teste de hipóteses usa a distribuição binomial. Os procedimentos são de acordo com Devore (2006):

H_0: $P = p_0$ vs H_1 : $P \neq p_0$

Faça x = número de sucessos na amostra de tamanho n

Rejeitar H_0 se $x > c$ ou se $x < c$

Onde c deve satisfazer a condição bin $(c, n, p_0) < \alpha$. C deve ser mais próximo de alfa pelo lado esquerdo. Isto deve ser verificado em tabela de probabilidade binomial.

Uma amostra de 20 peças apresentou 14 perfeitas. Testar se a proporção de perfeitas é igual a 90%. Use alfa de 5%.

$H_0 : P = 0,9$ vs $H_1 : P \neq 0,9$ e $n = 20$ e $x = 14$

O valor de c deve satisfazer a condição: bin $(c, 20, 0,9) < 0,05$

Da Figura 38 binomial, tem-se: bin (15, 20, 0,9) = 0,043, bin (16, 20, 0,9) = 0,133, c = 15

Figura 38 – Valores acumulados da distribuição binomial

n = 20

x	*p* 0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95	0,99
0	0,818	0,358	0,122	0,012	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,983	0,736	0,392	0,069	0,024	0,008	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,999	0,925	0,677	0,206	0,091	0,035	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	1,000	0,984	0,867	0,411	0,225	0,107	0,016	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	1,000	0,997	0,957	0,630	0,415	0,238	0,051	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	1,000	1,000	0,989	0,804	0,617	0,416	0,126	0,021	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	1,000	1,000	0,998	0,913	0,786	0,608	0,250	0,058	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	1,000	1,000	1,000	0,968	0,898	0,772	0,416	0,132	0,021	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	1,000	1,000	1,000	0,990	0,959	0,887	0,596	0,252	0,057	0,005	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
9	1,000	1,000	1,000	0,997	0,986	0,952	0,755	0,412	0,128	0,017	0,004	0,001	0,000	0,000	0,000
10	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,983	0,872	0,588	0,245	0,048	0,014	0,003	0,000	0,000	0,000
11	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,995	0,943	0,748	0,404	0,113	0,041	0,010	0,000	0,000	0,000
12	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,979	0,868	0,584	0,228	0,102	0,032	0,000	0,000	0,000
13	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,994	0,942	0,750	0,392	0,214	0,087	0,002	0,000	0,000
14	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,979	0,874	0,584	0,383	0,196	0,011	0,000	0,000
15	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,994	0,949	0,762	0,585	0,370	0,043	0,003	0,000
16	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,984	0,893	0,775	0,589	0,133	0,016	0,000
17	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,965	0,909	0,794	0,323	0,075	0,001
18	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,992	0,976	0,931	0,608	0,264	0,017
19	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,988	0,878	0,642	0,182

Fonte: EXTRAÍDO DE DEVORE (2006).

Como 14 < 15 deve-se rejeitar H_0. A proporção de perfeitas não é igual a 90%.

2.9.5 Inferência para a Diferença entre Duas Proporções

As técnicas mais utilizadas estão no Quadro 11.

Quadro 11 – Principais intervalos e testes para duas proporções

Duas proporções	
$n_1p_1 \geq 5$ e $n_1(1-p_1) \geq 5$ e $n_2p_2 \geq 5$ e $n_2(1-p_2) \geq 5$	Qualquer tamanho de amostra
$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$ $z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}\right)\left(1-\frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$	Teste exato de Fisher utilizando a distribuição hipergeométrica

Fonte: ELABORADO PELO AUTOR (2020).

Essas técnicas são utilizadas quando se quer testar a hipótese de igualdade entre proporções de duas populações. Como exemplo, determinar se o a proporção de peças defeituosas é diferente entre turnos de trabalho ou se existe diferença entre as proporções de alunos aprovados em duas disciplinas.

- <u>Amostras grandes e $n_1p_1 \geq 5$ e $n_1(1-p_1) \geq 5$ e $n_2p_2 \geq 5$ e $n_2(1-p_2) \geq 5$</u>

O intervalo com 100(1-α)% de confiança para (P_1 - P_2) é dado por:

Equação 42 – Intervalo de confiança par duas proporções para amostras grandes

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \qquad (42)$$

Onde:

$z_{\frac{\alpha}{2}}$ é obtido na tabela da distribuição normal padronizada.

Em uma pesquisa entre 100 funcionários do primeiro turno e 50 do segundo, verificou-se que 70% dos funcionários do primeiro turno são contrários ao trabalho aos sábados e enquanto 60% do segundo turno são contrários a esta estratégia da produção. Construa um I.C. 95% para a diferença entre as proporções populacionais.

$\hat{p}_1 = 0{,}70$ $n_1 = 100$ $\hat{p}_2 = 0{,}60$ $n_2 = 50$

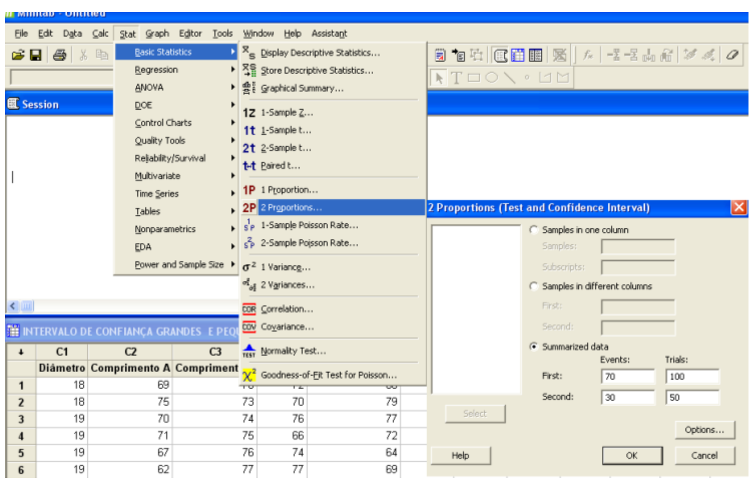
$$0{,}70 - 0{,}60 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}70(1-0{,}70)}{100} + \frac{0{,}60(1-0{,}60)}{50}}$$

[-0,06 ; 0,26]

Como o zero está compreendido no intervalo, não se pode dizer que exista diferença significativa entre os turnos.

O cálculo no *software* Minitab, conforme Figura 39.

Figura 39 – Cálculo do IC. para duas proporções (amostras grandes) no *software* Minitab



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

Test and CI for Two Proportions

Sample X N Sample p
1 70 100 0,700000
2 30 50 0,600000
Difference = p (1) - p (2)
Estimate for difference: 0,1
95% CI for difference: **(-0,0628068; 0,262807)**

Detalha-se o teste de hipóteses para duas proporções.

As hipóteses: $H_0 : P_1 = P_2$ e $H_1 : P_1 \neq. P_2$.

A estatística de teste é:

Equação 43 – Estatística de teste para duas proporções (amostras grandes)

$$z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}\right)\left(1-\frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \qquad (43)$$

A regra de decisão é a seguinte: devemos rejeitar H_0 se $|Z_0| > z_{\alpha/2}$. Onde $z_{\alpha/2}$ é obtido na tabela da distribuição normal padronizada.

Para o exemplo anterior tem-se:

$H_0 : P_1 = P_2$ e $H_1 : P_1 \neq. P_2$

$\hat{p}_1 = 0{,}70$ $n_1 = 100$ $\hat{p}_2 = 0{,}60$ $n_2 = 50$

$$z_0 = \frac{0{,}70 - 0{,}60}{\sqrt{\left(\frac{70+30}{100+50}\right)\left(1-\frac{70+30}{100+50}\right)\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{50}\right)}} = 1{,}22$$

O valor tabelado é $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1{,}96$

Como 1,22 < 1,96 os dados não dão evidências para rejeitar H_0. Portanto não se pode rejeitar a hipótese de igualdade entre os turnos.

- <u>Amostras pequenas e sem aproximação</u>

Quando as amostras são pequenas devemos utilizar o teste exato de Fisher baseado na distribuição hipergeométrica. Na verdade, este teste vale para qualquer tamanho de amostra de acordo com Montgomery *et al.* (2006).

As hipóteses são:

$H_0 : P_1 = P_2$ e $H_1 : P_1 \neq P_2$

O p-valor é calculado dependendo dos sucessos de cada amostra segundo Montgomery *et al.* (2006).

x_1 é o número de sucessos na amostra n_1
x_2 é o número de sucessos na amostra n_2

Quando $x_1 < x_2$
P-valor = $P (X \leq x_1) + \{ 1- P[X \leq (y -1)\}$

Onde:
y é o menor inteiro $\geq x_2$ que faz que com $p(y) \leq p(x_1)$

Quando $x_1 > x_2$
P-valor = $P [X \leq (x_1 -1)] + [1- P(X \leq y)]$

Onde:
y é o maior inteiro $\leq x_2$ que faz com que $p(y) \leq p(x_1)$

A probabilidade individual é calculada por:

Equação 44 – Probabilidade individual para o teste duas proporções amostras pequenas

$$p(X = x_1) = \frac{\binom{x_1+x_2}{x1}\binom{n_1+n_2-x_1-x_2}{n_1-x1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}} \tag{44}$$

Dois turnos estão sendo avaliados. Foi selecionada uma amostra de 25 peças do turno A e foram encontradas 3 peças defeituosas. Para o turno B foram selecionadas 22 peças sendo 4 defeituosas. Testar se os turnos são iguais em relação a proporção de defeitos com nível de significância de 5%.

$x_1 = 3$ $n_1 = 25$ $x_2 = 4$ e $n_2 = 22$

$H_0 : P_1 = P_2$ e $H_1 : P_1 \neq P_2$

Como $x_1 < x_2$ o p-valor será
P-valor = $P (X \leq x_1) + \{ 1- P[X \leq (y -1)\}$

Deve-se determinar o y por tentativas (tem que ser maior ou igual a $x_2 = 4$). Comece com y = 4 e compare p (y = 4) com p (x_1 = 3).

$$p(x = 3) = \frac{\binom{3+4}{3}\binom{25+22-3-4}{25-3}}{\binom{25+22}{25}} = \frac{\binom{7}{3}\binom{40}{22}}{\binom{47}{25}} = 0{,}2675$$

$$p(y = 4) = \frac{\binom{4+3}{4}\binom{25+22-4-3}{25-4}}{\binom{25+22}{25}} = \frac{\binom{7}{4}\binom{40}{21}}{\binom{47}{25}} = 0{,}3098$$

Como 0,3098 > 0,2675 tem-se que continuar até encontrarmos um p(y) ≤ 0,2675.

Aumente o y para 5

$$p(y = 5) = \frac{\binom{5+2}{5}\binom{25+22-5-2}{25-5}}{\binom{25+22}{25}} = \frac{\binom{7}{5}\binom{40}{20}}{\binom{47}{25}} = 0{,}1951$$

Como 0,1951 < 0,2675, utilize y = 5 e $x_1 = 3$. Desta maneira, o p-valor será:

P-valor = P $(X \leq x_1)$ + { 1- P[X $\leq$ (y -1)}

P-valor = P $(X \leq 3)$ + { 1- P[$X \leq (5 -1)$] }

P-valor = P $(X \leq 3)$ + [1- P$(X \leq 4)$]

Onde:

P $(X \leq 3)$ = p(0) + p(1) + p(2) + p(3)

$$p(x = 0) = \frac{\binom{3+4}{0}\binom{25+22-3-4}{25-0}}{\binom{25+22}{25}} = \frac{\binom{7}{0}\binom{40}{25}}{\binom{47}{25}} = 0{,}0027$$

$$p(x = 1) = \frac{\binom{7}{1}\binom{40}{24}}{\binom{47}{25}} = 0{,}0297$$

$$p(x = 2) = \frac{\binom{7}{2}\binom{40}{23}}{\binom{47}{25}} = 0{,}1256$$

$$p(x = 3) = \frac{\binom{3+4}{3}\binom{25+22-3-4}{25-3}}{\binom{25+22}{25}} = \frac{\binom{7}{3}\binom{40}{22}}{\binom{47}{25}} = 0{,}2675$$

P $(X \leq 3)$ = 0,0027 + 0,0297 + 0,1256 + 0,2675 = 0,4255

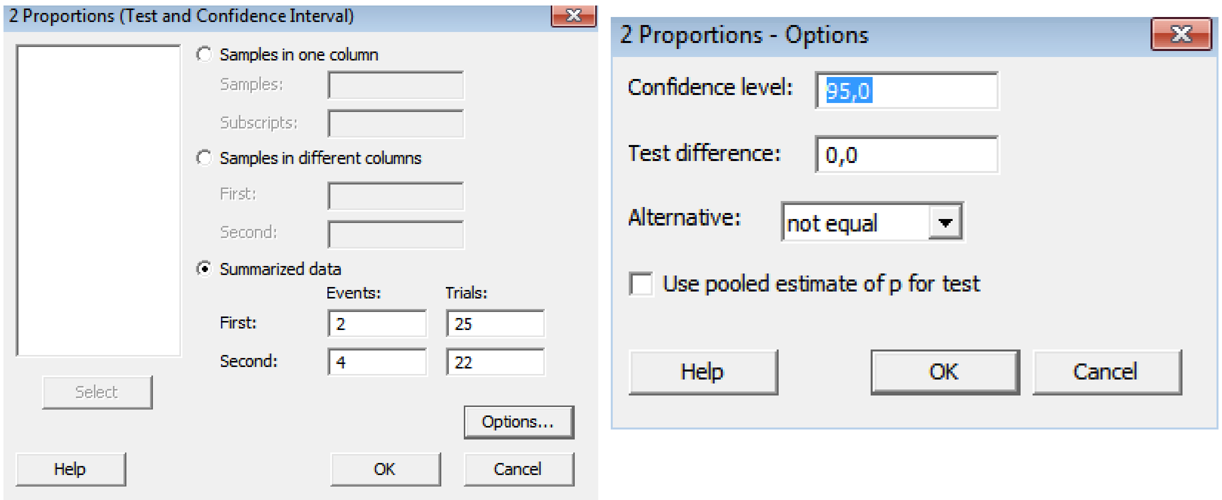
Analogamente tem-se P $(X \leq 4)$ = 0,7353

P-valor = 0,4255 + (1- 0,7353) = 0,6902

Como 69,02% > 5% não se pode rejeitar a hipótese de igualdade entre as proporções de defeitos.

O cálculo no *software* Minitab fica conforme Figura 40

Figura 40 – Cálculo do I.C. duas proporções (amostras pequenas) no *software* Minitab



Fonte: *SOFTWARE* MINITAB (2020).

Test and CI for Two Proportions

Sample	X	N	Sample p
1	3	25	0,120000
2	4	22	0,181818

Difference = p (1) - p (2)
Estimate for difference: -0,0618182

95% CI for difference: (-0,267249; 0,143612)
Test for difference = 0 (vs not = 0): Z = -0,59 P-Value = 0,555

* NOTE * The normal approximation may be inaccurate for small samples.

Fisher's exact test: P-Value = 0,690

REFERÊNCIAS

DEVORE, Jay L. ***Probabilidade e estatística para engenharia e ciências***. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

FREUND, J. E., SIMON, G. A. ***Estatística Aplicada: Economia, Administração e Contabilidade***. 9. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

GIL, Antônio Carlos. ***Métodos e técnicas de pesquisa social***. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.
MONTGOMERY, D. C., HINES, W. W.; GOLDSMAN, D. M.; BORRO, C. M. ***Probabilidade e Estatística na Engenharia***. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

MONTGOMERY, D. C; RANGER, G. C. ***Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros***. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

SOARES, José F.; FARIAS, Alfredo A.; CÉSAR, Cibele Comini. ***Introdução à estatística***. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

TRIOLA, M. F. ***Introdução à estatística***. 12. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

WERKEMA, Maria Cristina Catarino. ***Ferramentas estatísticas básicas para gerenciamento e processos***. Belo Horizonte: FCO, 1995.

WERKEMA, Maria Cristina Catarino. ***Inferência estatística***: como estabelecer conclusões com confiança no giro PDCA e DMAIC. Elsevier, RJ, 2014.